কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রবেশিকা পরীক্ষার পাঠ্য

প্রবেশিকা জ্যামিতি

ঢাকা পোগোজ স্কুলের প্রধান গণিত-শিক্ষক, এবং ম্যাট্রিকুলেশন
হাইস্কুল ফাইনাল ও হাই-মাদ্রাসা ফাইনাল পরীক্ষার গণিত-পরীক্ষক

শ্রীযোগেশ চন্দ্র সেন বি. এ.-প্রণীত

জগদীশচন্দ্র ঘোষ এণ্ড সন্‌স্

প্রেসিডেন্সী লাইব্রেরী

৬৪ কলেজ স্ট্রীট, কলিকাতা

বাংলাবাজার, ঢাকা

মূল্য [illegible]

প্রকাশক

শ্রীঅনিলচন্দ্র ঘোষ এম. এ.

প্রেসিডেন্সী লাইব্রেরী

৬৪ কলেজ স্ট্রীট্, কলিকাতা ও ঢাকা

প্রবর্তক প্রিন্টিং ওয়ার্কস্

৫২।৩ বহুবাজার স্ট্রীট্, কলিকাতা হইতে

শ্রীফণিভূষণ রায় কর্তৃক মুদ্রিত

ভূমিকা

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ম্যাট্রিকুলেশন পরীক্ষার পাঠ্যতালিকা এবং শিক্ষা-বিভাগের ডিরেক্টর মহোদয় কর্তৃক নির্দিষ্ট শ্রেণী-বিভাগ অবলম্বন করিয়া 'প্রবেশিকা জ্যামিতি' প্রকাশিত হইল। এই পুস্তকে আবশ্যিক পঠিতব্য বিষয় (Compulsory Course) সবই দেওয়া হইয়াছে এবং অতিরিক্ত পঠিতব্য বিষয়ের (Additional Course) অন্তর্ভুক্ত কয়েকটি উপপাদ্য, সম্পাদ্য এবং অনুশীলনী দেওয়া হইয়াছে। শিক্ষক-মহোদয়গণের নিকট অনুরোধ, তাঁহারা যেন প্রত্যেক মানের নির্দিষ্ট আবশ্যিক পঠিতবা বিষয়গুলিই প্রথমতঃ পড়ান। দ্বিতীয়বার পাঠ করিবার সময় অতিরিক্ত এবং জটিল বিষয়গুলি পড়াইলে শিক্ষার্থিগণের সহজে বোধগম্য হইবে।

এই পুস্তকে বহুসংখ্যক অনুশীলনী দেওয়া হইয়াছে। উহাদের অনেকগুলি প্রবেশিকা পরীক্ষার প্রশ্নমালা হইতে সঙ্কলন করা হইয়াছে। প্রত্যেক শিক্ষার্থী চেষ্টা করিলেই এই অনুশীলনীগুলির বেশীর ভাগ সমাধান করিতে পারিবে। জটিল প্রশ্নগুলি পুনরালোচনার (Revision) সময় পড়াইলেই হইবে।

প্রবেশিকা পরীক্ষার প্রশ্ন ইংরেজী ভাষায় লিখিত থাকে, এই জন্য প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার এবং বিশেষ প্রয়োজনীয় অনুশীলনী ও অনুসিদ্ধান্তের সাধারণ নির্বচনের ইংরেজী অনুবাদ দেওয়া হইল।

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক প্রকাশিত বানানপদ্ধতি ও পরিভাষা এই পুস্তকে অবলম্বিত হইয়াছে। পরিশিষ্টে জ্যামিতিক পরিভাষাও প্রদত্ত হইল।

প্রায় চল্লিশ বৎসরকাল গণিত-শিক্ষকের পদে শিক্ষাব্রতী থাকিয়া এবং প্রত্যক্ষভাবে ভালমন্দ সকল প্রকার শিক্ষার্থিগণের সংস্পর্শের সুযোগ লাভ করায়, জ্যামিতি শিক্ষায় উহাদের কি কারণে কি কি অসুবিধা হয় তাহার যতটা ধারণা

করিতে পারিয়াছি, তাহা এই পুস্তকে দূর করিবার প্রয়াস পাইয়াছি। এখন এই পুস্তক পাঠ করিয়া শিক্ষার্থিগণের কিছু উপকার হইলে পরিশ্রম সার্থক হইয়াছে, মনে করিব।

এই পুস্তকের ভুল-ত্রুটি সংশোধনের জন্য এবং ইহার উৎকর্ষের জন্য যে-কোন উপদেশ সাদরে গৃহীত হইবে। ইতি

জুন, ১৯৪০ গ্রন্থকার

সূচিপত্র

প্রথম খণ্ড—(Class VII)

দ্বিতীয় খণ্ড—(Class VIII)

তৃতীয় খণ্ড—(Class IX)

চতুর্থ খণ্ড—(Class X)

বঙ্গীয় গভর্নমেণ্টের শিক্ষা-বিভাগের পাঠ্যতালিকানুযায়ী সন্নিবেশিত কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের জ্যামিতির পাঠ্যতালিকা

আবশ্যিক বিষয় (Compulsory Course)

CLASS VII (সপ্তম মান)

Problems (সম্পাদ্য)

Bisection of angles and straight lines	Problems 1. 2.
Construction of Perpendiculars to straight lines	Problems 3, 4.
Construction of an angle equal to a given angle	Problem 5.
Construction of Parallels to a given straight line	Problem 6.

Theorems (উপপাদ্য)

Revision of the work done in class VI. If a straight line stands on another straight line, the sum of the two angles so formed is equal to two right angles ; and the converse. Theorems 1, 2.

If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal. Theorem 3.

If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each and also the angles contained by these sides equal, the triangles are congruent. Theorem 4.

If two sides of a triangle are equal, the angles opposite to these sides are equal ; and the converse. Theorems 5, 6.

If two triangles have three sides of the one equal to three sides of the other, each to each, the triangles are congruent. Theorem 7.

If one side of a triangle is produced, the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles. Theorem 8.

If two sides of a triangle are unequal the greater side has the greater angle opposite to it ; and the converse. Theorems 9, 10.

Any two sides of a triangle are together greater than the third side. Theorem 11.

Of all straight lines that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest. Theorem 12.

When a straight line cuts two other straight lines, if—

(1) a pair of alternate angles are equal, or (2) a pair of corresponding angles are equal, or (3) a pair of interior angles on the same side of the cutting line are together equal to two right angles, then the straight lines are parallel, and the converse. Theorems 13, 14.

Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel to one another. Theorem 15.

CLASS VIII (অষ্টম মান)

Problems (সম্পাদ্য)

Division of straight lines into any number of equal parts. Problem 10

Construction of triangles and quadrilaterals with sufficient data. Prob. 7—9 and 11—13.

Construction of a triangle equal in area to a given quadrilateral. Prob. 16.

Theorems (উপপাদ্য)

The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles, and the two corollaries thereto. Theorem 16, Cor. 1, 2.

If two triangles have two angles of the one equal to two angles of the other, each to each, and also one side of the one equal to the corresponding side of the other, the triangles are congruent. Th. 17.

If two right-angled triangles have their hypotenuses equal and one other side of the one equal to one side of the other, the triangles are congruent. Th. 18.

The opposite sides and angles of a Parallelogram are equal ; each diagonal bisects the Parallelogram ; and the diagonals bisect one another. Th. 19 & Cor. 3.

If there are three or more parallel straight lines and the intercepts made by them on any straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal. Th. 21

Parallelograms on the same or equal bases and of the same altitude are equal in area. Th. 22 and Cor.

Triangles on the same or equal bases and of the same altitude are equal in area. Th. 24 and Cor.

Equal triangles on the same or equal bases are of the same altitude. Th. 25 and observation.

CLASS IX (নবম মান)

Problems (সম্পাদ্য)

The locus of a point which is equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the fixed points. Prob. 14.

The locus of a point which is equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of staight lines which bisect the angles between the two given lines. Prob. 15.

To bisect a given arc of a circle. Prob. 20.

Construction of tangents to a circle and of common tangents to two circles. Prob. 21, 22, 23.

•Simple cases of the construction of circles from sufficient data. P, 219

Theorems (উপপাদ্য)

If a straight line drawn from the centre of a circle bisects a chord which does not pass through the centre, it cuts the chord at right angles ; and the converse. Th. 30.

There is one circle and only one which passes through three given points not in a straight line. Th. 31.

Equal chords in a circle are equidistant from the centre and the converse. Th. 32.

The angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc. Th. 34.

Angles in the same segment of a circle are equal ; if the line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle. Theorem 35, 36.

The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary, and the converse. Theorem 37, 38.

The angle in a semi-circle is a right-angle ; the angle in a segment greater than semi-circle is less than a right angle ; the angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle. Theorem 39.

In equal circles or in the same circle, (1) if two arcs subtend equal angles at the centre they are equal ; (2) conversely, if two arcs are equal they subtend equal angles at the centre. Theorem 40, 41.

In equal circles or in the same circle if two chords are equal they cut off equal arcs ; and the converse. Theorem 42, 43.

The tangent at any point of circle and the radius through the point are perpendicular to one another. Theorem 44·

The perpendicular to the tangent at the point of contact passes through the centre. Theorem 45.

If two tangents to a circle drawn from an external point are equal, they subtend equal angles at the centre. Theorem 47.

If two circles touch, the point of contact lies on the straight line through the centres. Theorem 48.

If a straight line touch a circle and from the point of contact a chord be drawn, the angles which the chord makes with the tangent, are equal to the angles in the alternate segments. Theorem 49.

CLASS X (দশম মান)

Problems (সম্পাদ্য)

To bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides. Ex. 9. P. 146.

To trisect a triangle by straight lines drawn from a given point in one of its sides. Ex. 10. P. 146.

Construction of a triangle equal in area to a given rectilineal figure. Problem 17.

On a given straight line to describe a segment of a circle which shall contain an angle equal to a given angle. Problem 24.

Theorems (উপপাদ্য)

Illustrations and explanations of the geometrical theorems corresponding to the following Algebraical identities :—

$k(a+b+c)=ka+kb+kc$ Theorem 50.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ Theorem 51.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ Theorem 52.

$a^2+b^2=(a+b)(a-b)$ Theorem 53.

The square on one side of a triangle is greater than, equal to or less than the sum of squares on the other two sides according as the angle contained by those sides is obtuse, a right angle, or acute. The difference in the case of inequality is twice the rectangle contained by one of the two sides and the projection on it of the other. Theorem 26,54,55.

If two chords of a circle intersect either inside or outside the circle the rectangle contained by the parts of the one is equal to the rectangle contained by the parts of the other. Theorem 57.

The medians of a triangle are concurrent. Ex. 3. P. 120.

The perpendiculars from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent. Ex. 4. P. 121.

প্রবেশিকা জ্যামিতি

প্রথম ভাগ

সংজ্ঞা

গণিত শাস্ত্রের যে শাখাতে রেখা, ক্ষেত্র ও আয়তনের বিষয় আলোচিত হয়, তাহাকে **জ্যামিতি** (Geometry) বলে। জ্যামিতিকে রেখাগণিত অথবা ক্ষেত্রতত্ত্ব বলা হয়। রেখাগণিতের সূত্রপাত বৈদিক যুগ হইতে হইয়াছে, ইহা বলা যাইতে পারে। আর্য ঋষিগণ যজুর্বেদের ক্রিয়া-কলাপের জন্য রেখা-দ্বারা সীমাবদ্ধ যজ্ঞবেদী নির্মাণ করিয়া রেখাগণিতের সূত্রপাত করেন। খ্রীষ্টের জন্মেরও প্রায় দেড় সহস্র বৎসর পূর্বে মিশর দেশে জমির মাপের প্রথা প্রচলিত ছিল। নীল নদের দুকূল বন্যায় প্লাবিত হওয়ায় জমির সীমানা অদৃশ্য হইয়া যাইত। এই জন্য মিশরবাসীরা তাহাদের জমি জরিপ করিয়া নক্সা রাখিতে বাধ্য হইত। ইহাতেই পাশ্চাত্য জ্যামিতির সূত্রপাত হয়। ক্রমে ক্রমে এই বিদ্যা প্রসার লাভ করিলে থেল্‌স্ (Thales) নামক প্রসিদ্ধ জ্যামিতিবিদ্ মিশর দেশ হইতে শিক্ষা লাভ করিয়া এই বিদ্যা গ্রীস দেশে প্রচার করেন। তাঁহার শিষ্য পিথাগোরাস (Pythagorus) ও অন্যান্য পণ্ডিতগণ ইহার উন্নতি সাধন করিয়া যুক্তিমূলক বৈজ্ঞানিক জ্যামিতির বিভিন্ন তত্ত্ব আবিষ্কার করেন। অবশেষে বিখ্যাত জ্যামিতিবিশারদ ইউক্লিড সমস্ত তত্ত্ব সংগ্রহ করিয়া "Elements" নাম দিয়া সুনিয়ন্ত্রিত এবং ধারাবাহিক জ্যামিতি প্রণয়ন করেন। আধুনিক জ্যামিতি এই "Elements"-এরই একটী পরিবর্তিত সংস্করণ। প্রথমতঃ Elements তের খণ্ডে বিভক্ত ছিল, কিন্তু উহার কতকগুলি খণ্ড লুপ্ত হইয়াছে।

১। আমরা যে সমস্ত বস্তু দেখিতে পাই প্রত্যেকেরই **দৈর্ঘ্য**, **প্রস্থ** এবং **বেধ** আছে। ইহাদের প্রত্যেককে এক একটি **মাত্রা** বা **আয়তন** (Dimension) বলা হয়।

যাহার দৈর্ঘ্য (length), প্রস্থ (breadth) এবং বেধ (thickness) আছে তাহাকে **ঘনবস্তু** (Solid) বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তুর তিনটি মাত্রাই আছে। যেমন—পুস্তক, বেঞ্চ, ইট ইত্যাদি।

২। কোনও ঘনবস্তু যে স্থান অধিকার করে উহাই তাহার **ঘনমান** (Volume)।

৩। যাহার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই তাহাকে **তল** (Surface) বলে। সুতরাং তলের কেবল দুইটি মাত্রা আছে। খুব পাত্‌লা কাগজকে তলের দৃষ্টান্ত স্বরূপ ধরা যাইতে পারে ; কিন্তু কাগজ যত পাত্‌লাই হউক না কেন উহার কিছু না কিছু বেধ আছেই। ঘনবস্তুর সীমা তল।

৪। যাহার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ বা বেধ নাই তাহাকে **রেখা** (Line) বলে। সুতরাং রেখার কেবল একটি মাত্রা আছে। তলের সীমাই রেখা, এবং দুইটি তলের ছেদে রেখার উৎপত্তি হয়।

প্রকৃত জ্যামিতিক রেখা অঙ্কিত করা যায় না। পেন্সিলের সূক্ষ্মতম অগ্রভাগ দ্বারা অঙ্কিত দাগ রেখার নিদর্শন স্বরূপ ধরিয়া লওয়া হয়, কারণ পেন্সিলের অগ্রভাগ যতই সূক্ষ্ম হউক না কেন উহা দ্বারা অঙ্কিত রেখার কিছু না কিছু প্রস্থ ও বেধ থাকিবেই।

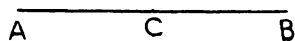
৫। যাহার অবস্থান আছে কিন্তু পরিমাপ নাই তাহাকে **বিন্দু** (Point) বলে। সুতরাং বিন্দুর কোন মাত্রাই নাই। রেখার সীমা বিন্দু ; এবং দুইটি রেখা ছেদ করিলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়। প্রকৃত জ্যামিতিক বিন্দু চক্ষুর অগোচর। সাধারণতঃ পেন্সিলের অগ্রভাগ দ্বারা যে বিন্দুর দাগ দেওয়া হয় তাহা উহার অবস্থান নির্দেশ করে মাত্র।

৬। বিন্দু, রেখা ও তলের সমবায়কে **চিত্র** (Figure) বলে।

৭। রেখা দুই প্রকার—**সরল** ও **বক্র**। যে রেখা প্রত্যেক বিন্দুতে দিকের সমতা রক্ষা করে তাহাকে **সরল রেখা** (Straight Line) বলে। সুতরাং দুইটি বিন্দু একাধিক সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হইতে পারে না, অর্থাৎ দুইটি বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি সরল রেখা অঙ্কিত হইতে পারে। অতএব দুইটি বিন্দু দিয়া একাধিক সরল রেখা টানিলে উহাদের সমাপতন হইবে। ইহা হইতে আমরা বলিতে পারি

(ক) দুইটি সরল রেখা একটি স্থান বেষ্টন করিতে পারে না।

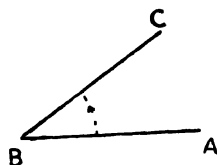
(খ) দুইটি সরল রেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

(গ) দুইটি সীমাবিন্দুই একটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য ও অবস্থান নির্দেশ করে। সরল রেখার সীমান্ত বিন্দুদ্বয় A ও B হইলে ঐ রেখাকে AB সরল রেখা বলা হয়।

৮। AB সরল রেখার মধ্যে যদি C বিন্দু এরূপ অবস্থিত হয় যে উহার AC অংশ BC অংশের সমান, তবে AB সরল রেখাটি C বিন্দুতে **সমদ্বিখণ্ডিত** হইয়াছে বলা হয়।

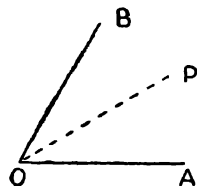
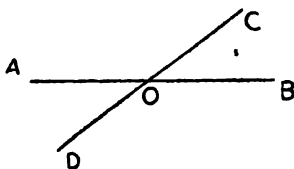
৯। যে রেখা বিন্দুতে বিন্দুতে দিক্ পরিবর্ত্তন করে উহার নাম **বক্র রেখা** (Curved Line)।

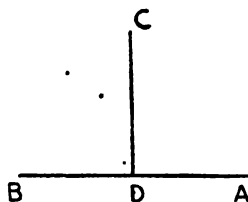
১০। একটি তলের যে কোন দুইটি বিন্দু সংযুক্ত করিয়া একটি সরল রেখা টানিলে যদি উহা ঠিক তলের উপর অবস্থিত হয় তবে ঐ তলকে **সমতল** (Plane) বলে।

১১। দুইটি সরল রেখা কোন এক বিন্দুতে মিলিত হইলে **কোণ** (Angle) উৎপন্ন হয়।

দুইটি সরল রেখা A B, BC, B বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় ABC কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। AB ও BC, ABC কোণের **বাহু** (Arm) এবং B বিন্দুকে উহার **শীর্ষ** (Vertex) বলে।

মনে কর, C B রেখা A B রেখার সহিত সমাপতন (coincidence) অবস্থায় আছে, এখন যদি C B রেখাটির B বিন্দু স্থিরতর রাখিয়া রেখাটিকে ঘুরাইতে থাকি, তাহা হইলে A B হইতে BC যত অপসৃত হইবে ততই ABC কোণ বৃহত্তর হইতে থাকিবে। "∠" ইহা কোণের সাঙ্কেতিক চিহ্ন। ∠ABC লিখিলে ABC কোণ বুঝায়।

১২। যে সরল রেখা কোন একটি কোণকে সমভাগে দ্বিখণ্ডিত করে তাহাকে উহার **সম-দ্বিখণ্ডক** (Bisector) বলে।

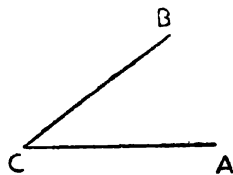
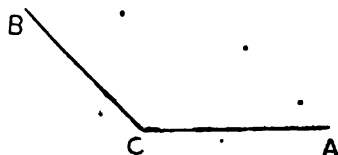
১৩। কোনও দুইটি কোণের একই শীর্ষ এবং একটি সাধারণ বাহু থাকিলে উহাদিগকে **সন্নিহিত** (Adjacent) **কোণ** বলে। এই স্থলে BOD ও DOA সন্নিহিত কোণ।

১৪। দুইটি সরল রেখা কোনও বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের প্রত্যেক জোড়া বিপরীত কোণের নাম **বিপ্রতীপ কোণ** (Vertically opposite angles)। এই চিত্রের AOC ও BOD এবং BOC ও AOD বিপ্রতীপ কোণ।

১৫। একটি সরল রেখা অন্য একটি সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যদি সন্নিহিত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে উহাদের প্রত্যেকটিকে **সমকোণ** (Right angle) বলে; এবং সমকোণের বাহুদ্বয়ের একটিকে অপরটির **লম্ব**

(Perpendicular) বলে। এই চিত্রে ADC কোণ BDC কোণের সমান, এবং উহারা প্রত্যেকে সমকোণ। AB এবং CD পরস্পর পরস্পরের লম্ব।

দ্রষ্টব্য—যদি D বিন্দু স্থির থাকিয়া D B রেখা ঘুরিতে থাকে, তবে উহা একবার মাত্র এমন স্থান (DC) অধিকার করিবে যেখানে $\angle CDB = \angle CDA$। সুতরাং,

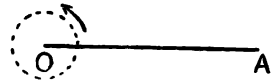
(১) একটি সরল রেখার কোন এক বিন্দু হইতে কেবল একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যায়।

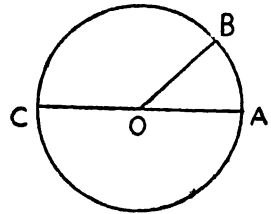
(২) সমস্ত সমকোণই সমান।

একটি সমকোণকে সমান নব্বই ভাগে বিভক্ত করিলে এক একটি ভাগকে **ডিগ্রি** বলে। নব্বই ডিগ্রি ৯০° এইরূপে লিখিতে হয়। এক একটি ডিগ্রি সমান ষাট ভাগে ভাগ করিলে এক একটি ভাগকে **মিনিট** এবং এক একটি মিনিটকে সমান ষাট ভাগে ভাগ করিলে প্রত্যেকটিকে এক একটি **সেকেণ্ড** বলে। অতএব ষাট সেকেণ্ডে এক মিনিট, ষাট মিনিটএ এক ডিগ্রি এবং নব্বই ডিগ্রিতে এক সমকোণ। সুতরাং দুই সমকোণ = ১৮০°, এবং চারি সমকোণ = ৩৬০°। পনর ডিগ্রি ত্রিশ মিনিট পয়তাল্লিশ সেকেণ্ড—"১৫° ৩০′ ৪৫″" এইরূপ লিখিত হয়।

১৬। যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **সূক্ষ্ম কোণ** (Acute angle) বলে।

১৭। যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **স্থূল কোণ** (Obtuse angle) বলে।

১৮। কোন কোণের একটি বাহু শীর্ষের চতুর্দিকে ঘুরিতে ঘুরিতে অপর বাহুর বিপরীত দিকে উহার সহিত এক সরল রেখা হইলে উৎপন্ন কোণটীকে **সরল কোণ** (Straight angle) বলে। সরল কোণ দুই সমকোণের সমান।

১৯। যে কোণ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **প্রবৃদ্ধ** (Reflex or re-entrant) **কোণ** বলে।

OA রেখাটি O বিন্দুর চতুর্দিকে OA হইতে ঘুরিয়া আবার OAর সহিত মিলিত হইলে উহা একটি চারি সমকোণ (৩৬০°) উৎপন্ন করে।

২০। একটি মাত্র বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** (Circle) বলা যায়, যদি ঐ ক্ষেত্রের অন্তর্গত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উক্ত বক্র রেখা পর্যন্ত অঙ্কিত সমস্ত সরল রেখাই পরস্পর সমান হয়। এই নির্দিষ্ট বিন্দুকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলে, এবং ঐ বক্র রেখাটিকে বৃত্তের **পরিধি** (Circumference) বলে।

কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখাকে উহার **অর** বা **ব্যাসার্ধ** (Radius) বলে। যে সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া উহার উভয় দিকে পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে তাহাকে ঐ বৃত্তের **ব্যাস** (Diameter) বলে। সুতরাং অর ব্যাসের অর্ধাংশ। এই জন্য অরকে ব্যাসার্ধ বলা যায়। অতএব কোনও বৃত্তের সমস্ত ব্যাসই পরস্পর সমান।

পরিধির যে কোন অংশকে বৃত্তের **চাপ** (Arc) বলে। কোন বৃত্তের একটি ব্যাস এবং ঐ ব্যাস কর্তৃক ছিন্ন পরিধির একাংশ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম **বৃত্তার্ধ** (Semi-circle)।

স্বীকার্য (Postulates)

জ্যামিতির অঙ্কনাদির সুবিধার জন্য নিম্নলিখিত বিষয়গুলি স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে, উহাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি **স্বীকার্য** বলে।

স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে—

১। কোন এক বিন্দু হইতে অপর এক বিন্দু পর্যন্ত একটি সরল রেখা টানা যায়।

২। যে কোন সসীম সরল রেখা যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

৩। যে কোনও বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন সরল রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

স্বতঃসিদ্ধ (Axioms)

যে সমস্ত সত্য বিনা প্রমাণে স্বীকার করিয়া লওয়া হয় অর্থাৎ যাহারা স্বয়ংসিদ্ধ উহাদিগকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলে।

কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ সকল প্রকার মান (magnitude) সম্পর্কেই প্রযোজ্য, আবার কতকগুলি কেবল জ্যামিতিক মান সম্পর্কে প্রযোজ্য।

সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ (General Axioms)

১। যে সকল বস্তু অন্য একটি পৃথক্ বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

২। সমান সমান (বা একই) বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে সমষ্টিগুলি পরস্পর সমান।

৩। সমান সমান (বা একই) বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে অন্তরগুলিও পরস্পর সমান।

৪। সমান সমান বস্তুর সহিত অসমান বস্তু যোগ করিলে সমষ্টিগুলি অসমান।

৫। অসমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে অন্তরগুলি অসমান।

৬। সমান সমান বস্তুর সমগুণিতক সমান। যেমন, সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণগুলি সমান।

৭। সমান সমান বস্তুর সমানাংশগুলিও সমান। যেমন, সমান সমান বস্তুর অর্ধাংশগুলি সমান।

৮। সমস্ত বস্তুটি উহার অংশবিশেষ অপেক্ষা বৃহত্তর।

জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ

৯। যে সকল মানের (magnitude) পরস্পর সমাপতন হয় অর্থাৎ যাহারা ঠিক একই স্থান পূর্ণ করে (coincide) তাহারা পরস্পর সমান।

১০। দুইটি সরল রেখা দ্বারা কোন স্থান সীমাবদ্ধ হইতে পারে না।

১১। সমস্ত সমকোণই পরস্পর সমান।

উপরিপাত (Superposition)—নবম স্বতঃসিদ্ধ হইতে আমরা ইহাই বুঝি যে, যে কোনও জ্যামিতিক রাশিকে (রেখা, কোণ বা ক্ষেত্র) উহার আকারের পরিবর্তন না করিয়া তুলিয়া লইয়া অপর অনুরূপ রাশির উপর স্থাপন করিলে যদি উহারা পরস্পর মিলিয়া যায়, তবে উহারা **সর্বতোভাবে সমান**। এইরূপ স্থাপন করাকে **উপরিপাত** প্রক্রিয়া বলা হয়।

প্রতিজ্ঞা

জ্যামিতির এক-একটি আলোচ্য বিষয়ের নাম **প্রতিজ্ঞা** (Proposition)। প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার—**উপপাদ্য** (Theorem) এবং **সম্পাদ্য** (Problem)।

যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক সত্য প্রমাণ করিতে হয় তাহাকে **উপপাদ্য** বলে।

যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হয় তাহাকে **সম্পাদ্য** বলে।

প্রত্যেক প্রতিজ্ঞা চারিটি অংশে বিভক্ত করা যায়, উহার প্রত্যেক অংশকে উহার এক-একটি **অঙ্গ** বলা যায়।—

(১) **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation)—সাধারণ ভাষায় প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্যটির বর্ণনা।

(২) **বিশেষ নির্বচন** (Particular Enunciation)—চিত্রের সাহায্যে সাধারণ নির্বচনের পুনরুল্লেখ।

(৩) **অঙ্কন** (Construction)—উপপাদ্যের প্রমাণ বা সম্পাদ্যের অঙ্কন সাধনার্থ আবশ্যক সরলরেখা ও বৃত্তাদি অঙ্কন।

(৪) **প্রমাণ** (Proof)—উপপাদ্যের বর্ণনা যথার্থ, অথবা সম্পাদ্যের অঙ্কন সম্পন্ন হইয়াছে, তাহার যুক্তি প্রদর্শন।

উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচন দুইভাগে বিভক্ত—

কল্পনা (Hypothesis)—যাহা সত্য বলিয়া ধরিয়া লওয়া যায়।

সিদ্ধান্ত (Conclusion)—যাহা প্রমাণ করিতে হইবে।

এইরূপ, সম্পাদ্যের সাধারণ নির্বচনও দুইভাগে বিভক্ত—

(১) **উপাত্ত** (Data)—যাহা দেওয়া আছে।

(২) **করণীয়** (Quæsita)—যাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

যদি কোন উপপাদ্য হইতে অপর একটি উপপাদ্য অতি সহজেই অনুমান করিয়া লওয়া যায়, তবে দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির **অনুসিদ্ধান্ত** (Corollary) বলে।

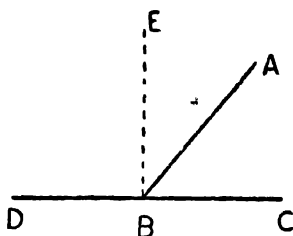
এই পুস্তকে নিম্নলিখিত সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হইয়াছে।

অতএব	$\therefore$	বৃত্ত	$\odot$
কারণ বা যেহেতু	$\because$	স্বতঃসিদ্ধ	স্বতঃ
সমান	$=$	অনুসিদ্ধান্ত	অনু
কোণ	$\angle$	উপপাদ্য	উপ
ত্রিভুজ	$\triangle$	সম্পাদ্য	স
বৃহত্তর	$>$	ইহাই উপপাদ্য বিষয়	ই. উ. বি।
ক্ষুদ্রতর	$<$	ইহাই সম্পাদ্য বিষয়	ই. স. বি।

কোণ-বিষয়ক উপপাদ্য

উপপাদ্য ১

সাধারণ নির্বচন। একটি সরল রেখা অপর এক সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[If a straight line stands on another straight line, the sum of the two adjacent angles so formed is equal to two right angles.]

বিশেষ নির্বচন। মনে কর, AB সরল রেখা CD সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হওয়াতে ABC, ABD এই সন্নিহিত কোণ দুইটি উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle ABC + \angle ABD =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন। মনে কর, BE সরল রেখা CDএর সহিত সমকোণ করিয়া অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ। $\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABE + \angle EBD$

আবার, $\angle EBC + \angle EBD = \angle ABC + \angle ABE + \angle EBD$

$\therefore \quad \angle ABC + \angle ABD = \angle EBC + \angle EBD$ (স্বতঃ ১)

কিন্তু $\angle EBC$ এবং $\angle EBD$ প্রত্যেকে এক একটি সমকোণ, সুতরাং উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

$\therefore \quad \angle ABC + \angle ABD =$ দুই সমকোণ

ই. উ. বি.

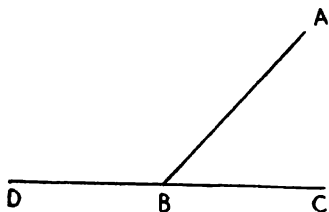
বিকল্প প্রমাণ (Alternative proof)

যেহেতু, $\angle ABC + \angle ABD = \angle CBD$

কিন্তু CBD একটি সরল রেখা।

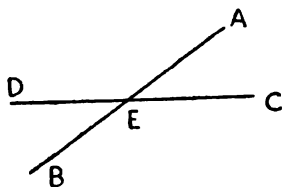
স্থতরাং $\angle CBD$ একটি সরল কোণ।

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ABD = \angle CBD =$ এক সরল কোণ

= দুই সমকোণ।

ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

এস্থলে প্রমাণ করিতে হইবে যে

$\angle CEA + \angle AED + \angle DEB + \angle BEC$ = চারি সমকোণ।

প্রমাণ। AE এবং BE, CD রেখার উপর দণ্ডায়মান হইয়াছে, স্থতরাং

সন্নিহিত কোণ বলিয়া

$\angle CEA + \angle AED$ = দুই সমকোণ

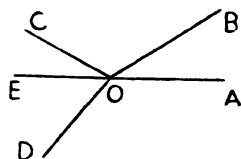
এইরূপ $\angle DEB + \angle BEC$ = দুই সমকোণ

$\therefore$ $\angle CEA + \angle AED + \angle DEB + \angle BEC$ = চারি সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কয়েকটি সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যতগুলি কোণ উৎপন্ন হয় উহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

এস্থলে, OA, OB, OC, OD সরল রেখাগুলি O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA$ = চারি-সমকোণ।

AO সরল রেখা E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

এখন $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA$

$= \angle AOB + \angle BOC + \angle COE + \angle EOD + \angle DOA$

= সরল কোণ AOE + সরল কোণ EOA

= দুই সমকোণ + দুই সমকোণ

= চারি সমকোণ।

দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হইলে উহাদের প্রত্যেকটিকে অপরটির **পূরক কোণ** (Complementary angle) বলে। এবং একটিকে অপরটির **পূরক** (Complement) বলে। যথা,—৬০° এবং ৩০° পরস্পর পূরক কোণ; ৩৭° ৩০′ এবং ৫২° ৩০′ পরস্পর পূরক কোণ; কারণ ৬০° + ৩০° = ৯০°, এবং ৩৭° ৩০′ + ৫২° ৩০′ = ৯০°।

দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের প্রত্যেকটিকে অপরটির **সম্পূরক কোণ** (Supplementary angle) বলে। যথা,—১২০° + ৬০° = ১৮০° = দুই সমকোণ, সুতরাং ১২০° এবং ৬০° পরস্পর সম্পূরক কোণ। এইরূপ ৭৪° ৩০′ ৩০″ এবং ১০৫° ২৯′ ৩০″ সম্পূরক কোণ, কারণ ৭৪° ৩০′ ৩০″ + ১০৫° ২৯′ ৩০″ = ১৮০°।

৯০° হইতে কোন কোণের পরিমাণ বিয়োগ করিলে উহার পূরক কোণের পরিমাণ পাওয়া যায়। এইরূপ ১৮০° হইতে কোন কোণের পরিমাণ বিয়োগ করিলে উহার সম্পূরক কোণের পরিমাণ পাওয়া যায়। সুতরাং

সমান সমান কোণের কিংবা একই কোণের পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

এবং সমান সমান কোণের কিংবা একই কোণের সম্পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

উদাহরণ ১। ২৭° ৩০′ এর পূরক কোণের পরিমাণ স্থির কর।

৯০° − ২৭° ৩০′ = ৬২° ৩০′

উদাহরণ ২। ৫৭° ৩০′ ৩০″ এর সম্পূরক কোণ নির্ণয় কর।

১৮০° − ৫৭° ৩০′ ৩০″ = ১২২° ২৯′ ৩০″

অনুশীলনী

১। প্রথম উপপাদ্যের $\angle ABC$ 30° হইলে, $\angle ABD$ এর পরিমাণ কত ?

২। নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণ কত ?

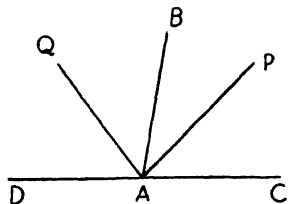
40° ; 46° ; 27° ; $54^\circ\ 30'$; $43^\circ\ 45'$; $31^\circ\ 30'\ 30''$

৩। নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণ নির্ণয় কর।—

35°, 60°, 84°, 126°, $95^\circ\ 30'$, $112^\circ\ 29'\ 30''$

৪। দুইটি সরল রেখা এক বিন্দুতে ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহার একটি সমকোণ হইলে প্রত্যেকেই সমকোণ।

৫। প্রমাণ কর যে, কোন কোণের অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণ।

মনে কর BAC একটি কোণ এবং ইহার বাহু CA, D পর্যন্ত বর্ধিত হইল। AP এবং AQ ইহার যথাক্রমে অন্তঃস্থ (internal) ও বহিঃস্থ (external) সমদ্বিখণ্ডক (bisector)। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle PAQ =$ এক সমকোণ।

$\angle BAC + \angle BAD =$ দুই সমকোণ, কারণ উহারা সন্নিহিত কোণ।

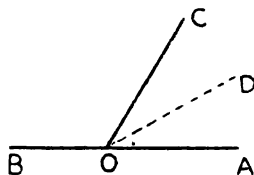
$\therefore\ \angle PAQ = \angle PAB + \angle BAQ = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle BAD$

$= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BAD) = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ) = এক সমকোণ।

উপপাদ্য ২

দুইটি সন্নিহিত কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের বহির্বাহুদ্বয় একই সরল রেখার অন্তর্গত হইবে।

[If two adjacent angles are together equal to two right angles, their exterior arms are in one and the same straight line.]

মনে কর, AOC and BOC সন্নিহিত কোণ দুইটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, কোণ দুইটির বহির্বাহু OA এবং OB একই সরল রেখার অন্তর্গত।

অঙ্কন—যদি OA এবং OB একটি সরল রেখার অন্তর্গত না হয়,
মনে কর, OD এবং OB একই সরল রেখার অন্তর্গত।

প্রমাণ—অতএব $\angle BOD$ = একটি সরল কোণ = দুই সমকোণ
কিন্তু, $\angle BOA = \angle AOC + \angle BOC$ = দুই সমকোণ (কল্পনা)
$\therefore \angle BOD = \angle BOA$
কিন্তু OD এবং OA একই সরল রেখা না হইলে ইহা অসম্ভব।
সুতরাং OD এবং OA একই সরল রেখা।
আবার অঙ্কনানুযায়ী OD এবং OB একই সরল রেখার অন্তর্গত।
$\therefore$ OA এবং OB-ও একই সরল রেখার অন্তর্গত।

ই. উ বি.

এই উপপাদ্যটির ইংরাজি নির্বচন এইরূপও হইতে পারে—

If a straight line meets two other straighl lines from opposite sides of it, so as to make the adjacent angles supplementary, then these two straight lines are in one and the same straight line.

বিপরীত উপপাদ্য (Converse Theorems)

একটি উপপাদ্যের **কল্পনা** ও **সিদ্ধান্ত** যথাক্রমে অপর একটি উপপাদ্যের **সিদ্ধান্ত** ও **কল্পনা** হইলে, উহাদের একটিকে অপরটির **বিপরীত উপপাদ্য** বলে।

প্রথম উপপাদ্য দ্বিতীয় উপপাদ্যের বিপরীত, কারণ

কল্পনা	সিদ্ধান্ত
প্রথম উপপাদ্যে দুইটি সন্নিহিত কোণের বহির্বাহুদ্বয় একই সরল রেখার অন্তর্গত,	দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,
দ্বিতীয় উপপাদ্যে দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।	দুইটি সন্নিহিত কোণের বহির্বাহুদ্বয় একই সরল রেখার অন্তর্গত।

দ্রষ্টব্য। পরে দেখা যাইবে যে বিপরীত উপপাদ্য সর্বদাই সত্য হয় না।

অনুশীলনী

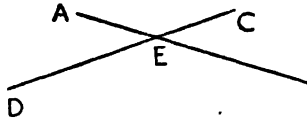
১। এক বিন্দুতে চারিটি সরল রেখা মিলিত হইয়া চারিটি সমকোণ উৎপন্ন করিলে, এই চারিটি সরল রেখা দুই সরল রেখায় পরিণত হইবে।

২। দুইটি সন্নিহিত কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে উহাদের বহির্বাহুদ্বয় একই সরল রেখার অন্তর্গত হইবে।

৩। AB সরল রেখার C বিন্দু হইতে বিপরীত দিকে CD এবং CE রেখাদ্বয় টানিলে যদি $\angle BCD = \angle ACE$, প্রমাণ কর যে CD এবং CE একই সরল রেখার অন্তর্গত।

উপপাদ্য ৩

দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.]

মনে কর, AB এবং CD দুইটি সরল রেখা পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $\angle AEC$ = বিপ্রতীপ $\angle BED$,

(২) $\angle BEC$ = বিপ্রতীপ $\angle AED$.

প্রমাণ। যেহেতু AB এবং EC সরল রেখাদ্বয় E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ সন্নিহিত কোণ বলিয়া $\angle AEC + \angle BEC$ = দুই সমকোণ। (উপঃ ১)

আবার CD এবং BE সরল রেখাদ্বয় E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ সন্নিহিত কোণ বলিয়া $\angle BEC + \angle BED$ = দুই সমকোণ।

$\therefore \angle AEC + \angle BEC = \angle BEC + \angle BED$

উভয় দিক হইতে $\angle BEC$ বাদ দিলে, অবশিষ্ট কোণ দুইটি সমান হইবে।

(স্বতঃ ৩)

$\therefore \angle AEC = \angle BED$.

এইরূপে ইহাও প্রমাণ করা যাইবে যে, $\angle BEC = \angle AED$. ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। AB এবং CD সরল রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল,

(ক) $\angle AOD = 60°$, অন্যান্য কোণের পরিমাণ কত ?

(খ) $\angle DOB = 50°$, অন্যান্য কোণের পরিমাণ কত ?

(গ) $\angle AOC + \angle DOB = 150°$, প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত ?

(ঘ) $\angle AOC + \angle COB + \angle BOD = 300°$, প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত ?

২। দুইটি সরল রেখা এক বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রত্যেক বিপরীত কোণযুগলের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একটি সরল রেখার অন্তর্গত হইবে। এবং উৎপন্ন কোণচতুষ্টয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে।

৩। দুইটি সরল রেখা এক বিন্দুতে ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণের কোন একটির সমদ্বিখণ্ডক উহার বিপরীত কোণকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

ঋজুরেখ ক্ষেত্র—ত্রিভুজ

১। সমতলের কোন অংশ এক বা একাধিক রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে তাহাকে **সামতলিক ক্ষেত্র** (Plane figure) বলে। সামতলিক ক্ষেত্রের সীমা-রেখাগুলির সমষ্টিকে উহার **পরিসীমা** (Perimeter) বলা হয়।

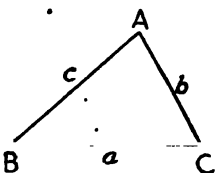
২। সামতলিক ক্ষেত্রের সীমা-রেখার অন্তর্গত স্থানের পরিমাণকে উহার **কালি** বা **ক্ষেত্রফল** (Area) বলে।

৩। কয়েকটি সরল রেখা দ্বারা বেষ্টিত সামতলিক ক্ষেত্রকে **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Rectilineal Figure) বলে।

৪। যে সমস্ত সরল রেখা একটি ক্ষেত্রকে সীমাবদ্ধ করে তাহাদিগকে উহার **বাহু** বা **ভুজ** (Side) বলা হয়। ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্ততঃ তিনটি বাহু থাকিবেই, কারণ এক বা দুইটি সরল রেখাদ্বারা কোন স্থান সীমাবদ্ধ করা যায় না।

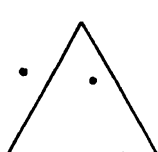
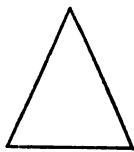
৫। তিনটি সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলা হয়।

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ আছে—ইহাদিগকে ত্রিভুজের ছয়টি **অঙ্গ** (Parts) বলা হয়।

এই চিত্রে BC, CA এবং AB সীমা রেখাত্রয় ABC ত্রিভুজের বাহু, এবং ∠ABC, ∠BCA ও ∠CAB উহার কোণত্রয়।

BC, CA ও AB বাহুত্রয়কে যথাক্রমে a, b ও c এবং A, B ও C বিন্দুস্থিত কোণত্রয়কে যথাক্রমে ∠A, ∠B ও ∠C বলা হইবে।

৬। ত্রিভুজের যে কোন কৌণিক বিন্দুকে উহার **শীর্ষ** (Vertex) বলে, এবং শীর্ষের সম্মুখস্থ বাহুকে উহার **ভূমি** (Base) বলে। A বিন্দুকে শীর্ষ ধরিলে, BC বাহুকে ভূমি বলা হইবে।

৭। ত্রিভুজ **ছয় প্রকার**—বাহু-ভেদে (১) **সমবাহু** ত্রিভুজ, (২) **সমদ্বিবাহু** ত্রিভুজ, এবং (৩) **বিষমবাহু** ত্রিভুজ; কোণ-ভেদে—(৪) **সমকোণী** ত্রিভুজ, (৫) **স্থূলকোণী** ত্রিভুজ এবং (৬) **সূক্ষ্মকোণী** ত্রিভুজ।

(১) যে ত্রিভুজের বাহু তিনটি পরস্পর সমান, তাহাকে **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral Triangle) বলে।

(১) (২) (৩)

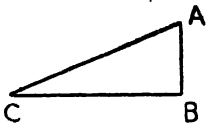
(২) যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles Triangle) বলে।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটি যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাহাকে উহার শীর্ষ (Vertex) এবং ঐ বাহু দুইটীর অন্তর্গত কোণকে **শিরঃকোণ** (Vertical Angle) বলা হয়। শীর্ষের সম্মুখস্থ বাহুটির নাম **ভূমি** (Base)।

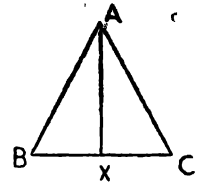
(৩) যে ত্রিভুজের বাহু তিনটি পরস্পর অসমান তাহাকে **বিষমভুজ ত্রিভুজ** (Scalene Triangle) বলে।

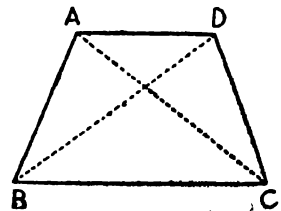
(৪) যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled Triangle) বলে।

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে। (৪) চিত্রে ∠ABC একটি সমকোণ, অতএব ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, এবং AC উহার অতিভুজ।

(৫) যে ত্রিভুজের একটি মাত্র কোণ স্থূলকোণ তাহাকে **স্থূলকোণী ত্রিভুজ** (Obtuse-angled Triangle) বলে।

(৪) (৫) (৬)

(৬) যে ত্রিভুজের **তিনটি** কোণই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ** (Acute-angled Triangle) বলে।

৮। ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে উহার সম্মুখস্থ বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখাকে **মধ্যমা** (Median)বলে। এই চিত্রে BC বাহুর মধ্যবিন্দু X, সুতরাং AX ত্রিভুজটির একটি মধ্যমা।

৯। চারি সরল রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **চতুর্ভুজ** বা **চতুষ্কোণ** (Quadrilateral) বলে।

যে সরল রেখা চতুর্ভুজের কোন দুইটি বিপরীত কৌণিক বিন্দু সংযুক্ত করে, তাহাকে **কর্ণ** (Diagonal) বলে।

এই চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ, এবং AC ও BD উহার কর্ণদ্বয়। ইহার চারিটি বাহু ও চারিটি কোণ আছে বলিয়া ইহার নাম চতুর্ভুজ বা চতুষ্কোণ।

১০। যে সামতলিক ক্ষেত্র চারিটি অপেক্ষা অধিক বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ তাহার নাম **বহুভুজ** (Polygon)।

পাঁচ বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের নাম					**পঞ্চভুজ**	(Pentagon)
ছয়	...	...	...	...	**ষড়্ভুজ**	(Hexagon)
সাত	...	...	...	...	**সপ্তভুজ**	(Heptagon)
আট	...	...	..	..	**অষ্টভুজ**	(Octagon)
নয়	...	...	...	...	**নবভুজ**	(Nonagon)
দশ	...	...	...	...	**দশভুজ**	(Decagon)
বার	...	...	...	....	**দ্বাদশভুজ**	(Dodecagon)
পনর	...	...	..	...	**পঞ্চদশভুজ**	(Quindecagon)

১১। যে বহুভুজক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান তাহার নাম **সমবাহু বহুভুজ** (Equilateral Polygon)।

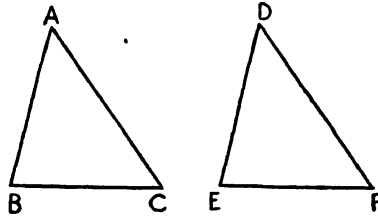
১২। যে বহুভুজক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলিও পরস্পর সমান তাহার নাম **সুষমবহুভুজ** (Regular Polygon)।

১৩। একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপরিপাত (Superposition) করিলে যদি উহাদের **সমাপতন** (Coincidence) হয়, অর্থাৎ যদি উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে ত্রিভুজ তুইটিকে **সর্বসম** (Congruent or equal in all respects) বলা হয়।

এইরূপ স্থলে সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলিকে **অনুরূপ কোণ** (Corresponding Angles) এবং সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে **অনুরূপ বাহু** (Corresponding Sides) বলা হয়।

উপপাদ্য ৪

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্গত কোণের সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two triangles have two sides of one equal to two sides of the other, each to each, and also the angles contained by these sides equal, then the triangles are equal in all respects. Or if two triangles have two sides and the included angle of one, respectively equal to two sides and the included angle of the other, then the two triangles are equal in all respects.]

মনে কর, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির AB = DE, AC = DF, এবং অন্তর্গত ∠BAC = অন্তর্গত ∠EDF,

প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABC এবং △DEF সর্বসম।

প্রমাণ। △ABCকে △DEFএর উপর এমন ভাবে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে।

কিন্তু AB = DE,

∴ B বিন্দু E বিন্দুর উপর পতিত হইবে।

আবার, DEএর উপর AB পতিত হইয়াছে, এবং ∠BAC = ∠EDF

∴ DFএর উপর AC পতিত হইবে।

কিন্তু AC = DF,

∴ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পতিত হইবে।

এখন B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পতিত হইয়াছে, সুতরাং BC ও EF বাহু মিলিয়া যাইবে, কারণ দুইটি বিন্দু সংযুক্ত করিয়া কেবল একটি সরল রেখাই টানা যায়, একাধিক নহে। অতএব DEF ত্রিভুজের সহিত ABC ত্রিভুজটির সমাপতন হইল।

$\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সর্বসম।

অর্থাৎ (১) $BC = EF$,

(২) $\angle ABC = \angle DEF$

(৩) $\angle ACB = \angle DFE$,

এবং (৪) ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। কোন সরল রেখার মধ্যবিন্দু হইতে উহার লম্ব অঙ্কিত করিলে ঐ লম্বের প্রত্যেক বিন্দু A এবং B বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

২। AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু O হইতে OC, ABএর লম্ব টানিলে, AOC এবং BOC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

৩। প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির লম্ব হইবে।

৪। AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু O দিয়া COD, ABএর লম্ব টানা হইল, যেন $OC = OD$; প্রমাণ কর AOC, COB, BOD এবং DOA ত্রিভুজচতুষ্টয় সর্বসম।

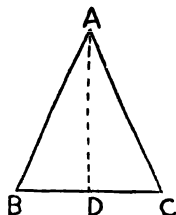
৫। কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণবিন্দু এবং ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা ভূমির লম্ব হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৬। ABCD চতুর্ভুজের বাহু $AB = BC = CD = DA$, এবং কোণগুলি সমকোণ। P এবং Q যথাক্রম AB এবং CDএর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে DAP এবং ADQ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

৭। ABCDEF একটি সুষম ষড়্ভুজ, AC, AE এবং CE সংযুক্ত করিলে $\triangle ACE$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

উপপাদ্য ৫

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি পরস্পর সমান।

[The angles at the base of an isosceles triangle are equal.]

মনে কর, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। উহার বাহুদ্বয় AB = AC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ABC = ∠ACB.

অঙ্কন। মনে কর, AD সরল রেখা ∠BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ। BAD ও CAD ত্রিভুজদ্বয়ের

AB = AC,

AD সাধারণ বাহু,

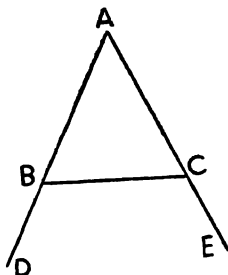
এবং অন্তর্গত ∠BAD = অন্তর্গত ∠CAD ;

∴ BAD এবং CAD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপঃ ৪)

সুতরাং ∠ABD = ∠ACD,

অর্থাৎ ∠ABC = ∠ACB. (ই. উ. বি.)

১ম অনুসিদ্ধান্ত। AB, AC সমান বাহু দুইটি বর্ধিত করিলে, উৎপন্ন DBC ও ECB বহিঃকোণ দুইটি পরস্পর সমান।

কারণ ∠DBC ও ∠ECB যথাক্রমে সমান কোণদ্বয় ABC ও ACB এর সম্পূরক।

২য় অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজ সমবাহু হইলে সদৃশ-কোণ হইবে। [An equilateral triangle is also equiangular.]

ABC সমবাহু ত্রিভুজ,

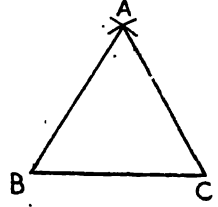
AB = AC,

$\therefore \angle BCA = \angle ABC.$

আবার AB = BC, $\therefore \angle BCA = \angle CAB.$

$\therefore \angle ABC = \angle CAB.$

$\therefore \angle ABC = \angle BCA$

$= \angle CAB.$

অনুশীলনী

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি উভয় দিকে বর্ধিত হইলে উৎপন্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

২। যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান তাহার বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

৩। ABC ত্রিভুজের AB = AC, এবং X, Y, Z যথাক্রমে BC, CA এবং ABএর মধ্যবিন্দু; প্রমাণ কর যে XY = XZ, এবং $\angle AYZ = \angle AZY$. (ক, প্র)

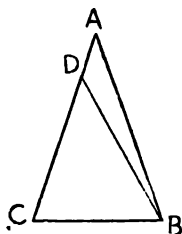
৪। প্রমাণ কর যে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোগে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাও সমবাহু।

৫। একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ দণ্ডায়মান হইলে একটি সম্পূর্ণরূপে অন্যটির মধ্যবর্তী হইবে। (ক, প্র)

৬। একই ভূমি BC এর উপর দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC, DBC অঙ্কিত হইলে প্রমাণ কর যে $\angle ABD = \angle ACD$.

উপপাদ্য ৬

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে ঐ কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

[If a triangle has two of its angles equal, then the sides opposite to the equal angles are also equal to one another.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = \angle ACB$,

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AC = AB$.

অঙ্কন। AB যদি ACএর সমান না হয়, মনে কর AC বৃহত্তর। CA হইতে AB এর সমান করিয়া CD ছেদ কর। এবং B বিন্দুর সহিত D বিন্দু সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ABC এবং DBC ত্রিভুজদ্বয়ের

$AB = DC$,

BC সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভূর্ত $\angle ABC =$ অন্তর্ভূর্ত $\angle DCB$;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান।

কিন্তু $\triangle ABC$ উহার অংশ $\triangle DBC$এর সমান; ইহা সম্পূর্ণ অসম্ভব। কারণ কোনও বস্তুর অংশবিশেষ উহার সমষ্টির সমান হইতে পারে না।

অতএব AB ও AC অসমান হইতে পারে না।

অর্থাৎ $AB = AC$. ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজ সদৃশ-কোণ হইলে, সমবাহুও হইবে।

[*An equiangular triangle is also equilateral.*]

দ্রষ্টব্য—পঞ্চম ও ষষ্ঠ উপপাদ্য পরস্পর বিপরীত প্রতিজ্ঞা। পঞ্চম উপপাদ্য পর্যন্ত কল্পনা হইতে সোজাসুজি যুক্তির সাহায্যে সিদ্ধান্ত প্রমাণিত হইয়াছে। এইরূপ প্রমাণ-প্রণালীর নাম **অন্বয়ী প্রমাণ** (Direct Proof)। কিন্তু ষষ্ঠ উপপাদ্যে একটি নূতন প্রণালী অবলম্বিত হইয়াছে, ইহার নাম **ব্যতিরেকী প্রমাণ** (Indirect Proof)। ইহাতে যাহা প্রমাণ করিতে হইবে তাহা অসত্য কল্পনা করিলে যাহা স্বতঃসিদ্ধ সত্য তাহা অসম্ভব বলিয়া প্রমাণিত হয়। এই স্থলে "সমষ্টি উহার অংশবিশেষ অপেক্ষা বৃহত্তর" এই স্বতঃসিদ্ধটি সত্য নহে বলিয়া প্রমাণিত হওয়ায় উহা অসম্ভব বলিয়া আমরা সিদ্ধান্তে উপনীত হইয়াছি। এই পদ্ধতিকে *Reductio ad absurdum* (অযৌক্তিক সিদ্ধান্তে পরিণতি) ও বলা হয়।

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের AB = AC, এবং ∠ABC ও ∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডক BO এবং CO, O বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর BO = CO.

২। একটি ত্রিভুজের ভূমি সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক এক বিন্দুতে মিলিত হইয়া সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি বর্ধিত করায় উৎপন্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। (ক. প্র.)

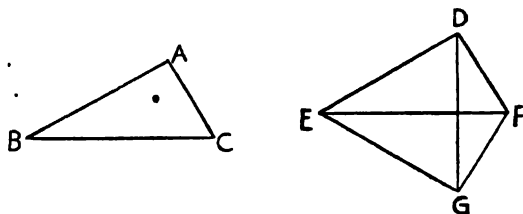
৪। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু ভূমির দিকে বর্ধিত করায় উৎপন্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় বর্ধিত করিলে, উৎপন্ন বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান হইবে।

৬। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু বর্ধিত করিলে, উৎপন্ন বহিঃকোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি যদি সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

উপপাদ্য ৭

দুইটি ত্রিভুজের একের বাহু তিনটি যথাক্রমে অপরের তিনটি বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two triangles have the three sides of one respectively equal to the three sides of the other, each to each, then the two triangles are equal in all respects.]

মনে কর, ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয়ের AB = DE, BC = EF, এবং CA = FD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং BC বাহু EF বাহুর উপর পতিত হয়, এবং A বিন্দু EFএর যে পার্শ্বে D আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে পতিত হয়।

যেহেতু BC = EF, অতএব C বিন্দু Fএর উপর পতিত হইবে।

এখন EGF, BAC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান। DG সংযুক্ত কর।

যেহেতু ED = BA = EG,

∴ $\angle$EDG = $\angle$EGD.

আবার DF = AC = GF,

∴ $\angle$FDG = $\angle$FGD.

∴ সমগ্র $\angle$EDF = সমগ্র $\angle$EGF = $\angle$BAC.

এখন ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের

AB = DE,

AC = DF.

অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠EDF ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। উপ ৪

অর্থাৎ ∠ABC = ∠DEF

∠ACB = ∠DFE

এবং ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলও সমান। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য—ইহা লক্ষ্য করিতে হইবে যে সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান। যথা, সমান সমান বাহু BC ও EFএর বিপরীত কোণদ্বয় ∠A ও ∠D পরস্পব সমান।

অনুশীলনী

১। একই ভূমি BCএর উপর অবস্থিত ABC ও DBC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজদ্বয়ের শীর্ষদ্বয় A এবং Dএর সংযোগ রেখা শিরঃকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং ভূমির উপর লম্ব হইবে।

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সংযোজক সরল রেখা শিরঃকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির লম্ব হইবে। (ক. প্র.)

৩। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে বিপরীত কোণগুলিও সমান হইবে।

৪। ABCD একটি রম্বস (চতুর্ভুজ, যাহার বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে),

প্রমাণ কর AC ও BD কর্ণদ্বয়

(ক) উহার কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে

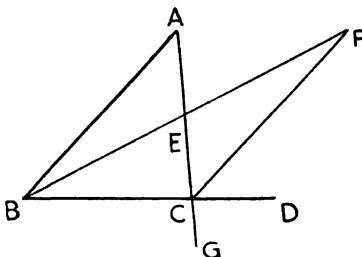
(খ) পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৫। ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের AB = DE, AC = DF, এবং X ও Y যথাক্রমে AC ও DFএর মধ্যবিন্দু। যদি BX, EYএর সমান হয়, প্রমাণ কর যে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

৬। ABCD চতুর্ভুজের AB = AD, BC = CD, প্রমাণ কর যে AC, ∠BAD এবং ∠BCD উভয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ইহাও প্রমাণ কর যে AC, BDকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য ৮

কোন ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহা দূরবর্তী অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is greater than either of the two interior opposite angles.]

মনে কর, △ABCএর BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত করায় ∠ACD বহিঃকোণ উৎপন্ন হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACD দূরবর্তী অন্তঃকোণ CAB এবং ABC প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন। মনে কর E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু। BE সংযুক্ত কর এবং BE রেখাকে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন EF, BEএর সমান হয়। CF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। AEB এবং CEF ত্রিভুজদ্বয়ের

AE = EC,

BE = EF,

এবং ∠AEB = বিপ্রতীপ ∠CEF ; উপ ৩

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। উপ ৪

∴ ∠EAB = ∠ECF

কিন্তু ∠ACD ইহার অংশ ∠ECF অপেক্ষা বৃহত্তর।

∴ ∠ACD, ∠EAB অর্থাৎ ∠CAB অপেক্ষা বৃহত্তর।

এইরূপ ACকে G বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BC বাহুর মধ্যবিন্দু Hএর সহিত A সংযুক্ত কর। AH, K বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন HK, AHএর সমান হয়। KC সংযুক্ত কর।

এখন পূর্বের ন্যায় প্রমাণ করা যাইতে পারে যে ∠BCG, ∠ABC হইতে বৃহত্তর।

কিন্তু ∠BCG = বিপ্রতীপ ∠ACD,

∴ ∠ACD, ∠ABC হইতে বৃহত্তর।

অতএব ∠ACD, অন্তঃকোণ ABC ও CAB প্রত্যেকটি হইতে বৃহত্তর।

ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

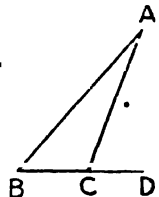
[Any two angles of a triangle are together less than two right angles.]

∠ABC, ∠ACD অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর

∴ ∠ABC ও ∠ACB একত্রে ∠ACD ও ∠ACB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। কিন্তু ∠ACD ও ∠ACB সন্নিহিত কোণ বলিয়া একত্রে দুই সমকোণ।

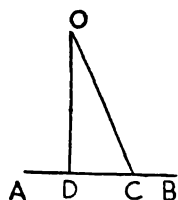
A

B C D

∴ ∠ABC ও ∠ACBএর সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অনুসিদ্ধান্ত ২। প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্ম কোণ আছে। [**Every triangle has at least two acute angles.**]

কারণ, যদি একটি কোণ স্থূল কিংবা সমকোণ হয় তবে অবশিষ্ট দুইটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্ম কোণ হইবেই, যেহেতু অনুসিদ্ধান্ত ১ অনুযায়ী ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। একটি সরল রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উক্ত রেখার উপর একটি মাত্র লম্ব টানা যায়।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর OD, OC উভয়েই বহিঃস্থ বিন্দু O হইতে ABএর উপর লম্ব। সুতরাং ∠ODC এবং ∠OCD উভয়েই সমকোণ। ইহা দ্বিতীয় অনুসিদ্ধান্ত অনুযায়ী অসম্ভব। অতএব O হইতে ABএর উপর একাধিক লম্ব টানা যায় না।

অনুশীলনী

১। ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ বা স্থূলকোণ হইলে অপর দুইটি কোণই সূক্ষ্মকোণ হইবে।

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সূক্ষ্মকোণ।

৩। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটি ভূমির দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণদ্বয় স্থূলকোণ হইবে।

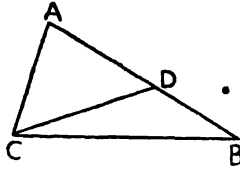
৪। ত্রিভুজের যে কোন বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৫। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর যে কোন বিন্দুর সহিত A সংযুক্ত করিয়া প্রথম অনুসিদ্ধান্ত প্রমাণ কর।

৬। ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ O বিন্দুর সহিত B ও C সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন ∠BOC, ∠BAC অপেক্ষা বৃহত্তর।

উপপাদ্য ৯

কোন ত্রিভুজের এক বাহু হইতে অপর এক বাহু বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If one side of a triangle be greater than another, then the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less.]

মনে কর, △ABC এর AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB, ∠ABC হইতে বৃহত্তর।

অঙ্কন। AB হইতে AC এর সমান করিয়া AD ছেদ করিয়া লও। CD যোগ কর।

প্রমাণ। △ADC এর AC = AD [অঙ্কন]

∴ ∠ADC = ∠ACD [উপঃ ৫]

কিন্তু বহিঃকোণ ADC দূরবর্তী অন্তঃকোণ ABC হইতে বৃহত্তর।

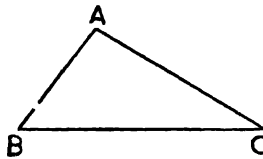
∴ ∠ACD, ∠ABC হইতে বৃহত্তর।

আবার, ∠ACB ইহার অংশ ∠ACD হইতে বৃহত্তর।

∴ ∠ACB, ∠ABC হইতে আরও বৃহত্তর। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ১০

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর এক কোণ হইতে বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণটির বিপরীত বাহুটি ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If one angle of a triangle be greater than another, then the side opposite to the greater angle is greater than the side opposite to the less.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ∠ABC, ∠ACB হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ACবাহু AB বাহু হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ। যদি AC, AB হইতে বৃহত্তর না হয়, তবে AC, AB এর সমান বা AB হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে।

যদি AC = AB

তবে ∠ABC = ∠ACB [উপঃ ৯]

কিন্তু কল্পনানুযায়ী উহারা অসমান।

সুতরাং ইহা অসম্ভব।

আবার, AC, AB হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে

∠ABC, ∠ACB হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে। [উপঃ ৯]

কিন্তু কল্পনানুযায়ী ∠ABC বৃহত্তর।

সুতরাং ইহাও অসম্ভব।

অতএব AC, AB এর সমান অথবা AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

∴ AC, AB অপেক্ষা বৃহত্তর। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। ১০ম উপপাদ্য ৯ম উপপাদ্যের বিপরীত।

অনুশীলনী

১। ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর সংলগ্ন কোণ দুইটি সূক্ষ্ম কোণ।

২। ABCD চতুর্ভুজের AD বৃহত্তম এবং BC ক্ষুদ্রতম বাহু, প্রমাণ কর যে $\angle A$ এবং $\angle D$ যথাক্রমে বিপরীত $\angle C$ এবং $\angle B$ অপেক্ষা বৃহত্তর। (ক, প্র)

৩। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু। (ক, প্র)

৪। স্থূলকোণী ত্রিভুজের, স্থূল কোণের বিপরীত বাহুই বৃহত্তম।

৫। ABC ত্রিভুজের A হইতে BC এর অন্তর্গত D বিন্দু পর্যন্ত রেখা টানা হইল ; AB যদি AC অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, প্রমাণ কর $AB > AD$।

৬। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; প্রমাণ কর $AB + AC > 2\,AD$

৭। ABC ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে কর, BC বৃহত্তম বাহু। $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore \quad \angle BAD = \angle CAD$।

এখন, $\angle ADB > \angle CAD \quad \therefore \quad \angle ADB > \angle BAD$

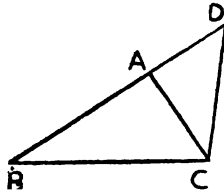
$\therefore \quad AB > BD$

এইরূপেই প্রমাণ করা যায় যে $AC > CD$।

$\therefore \quad (AB + AC) > (BD + CD)$, অর্থাৎ $(AB + AC) > BC$.

উপপাদ্য ১১

কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

[Any two sides of a triangle are together greater than the third side.]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার যে কোন দুইটি বাহু একত্রযোগে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন। BA বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD, AC এর সমান হয়। CD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\triangle ACD$ এর, $AD = AC$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ [উপঃ ৫]

কিন্তু $\angle BCD$ ইহার অংশ $\angle ACD$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore \angle BCD$, $\angle ADC$ অর্থাৎ $\angle BDC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore$ BD, BC অপেক্ষা বৃহত্তর। [উপঃ ১০]

কিন্তু $BD = AB + AD = AB + AC$

$\therefore (AB + AC)$, BC হইতে বৃহত্তর।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$(AB + BC) > AC$

এবং $(BC + CA) > AB$ ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

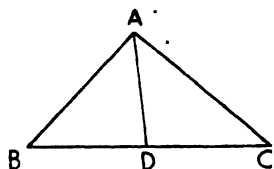
মনে কর, A বিন্দু হইতে AD, BC এর উপর লম্ব টানা হইল।

সমকোণ ADB > ∠BAD ∴ AB > BD,

সমকোণ ADC > ∠CAD ∴ AC > CD,

∴ (AB + AC) > (BD + CD) ;

কিন্তু (BD + CD) = BC

∴ (AB + AC) > BC

অনুশীলনী

১। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
(The difference of any two sides of a triangle is less than the third side).

[ক. প্র]

ABC ত্রিভুজের, (AB + AC) > BC

উভয় দিক হইতে AC বিয়োগ করিলে

AB > (BC—AC), অর্থাৎ BC ও AC এর অন্তর AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

২। চতুর্ভুজের যে কোন তিন বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। [ক. প্র]

৩। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু পর্যন্ত দুইটি সরল রেখা টানিলে উহাদের সমষ্টি অপর দুই বাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

৪। ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে O বিন্দু লওয়া হইল। প্রমাণ কর, (OA + OB + OC) < (AB + BC + CA)

৫। চতুর্ভুজের পরিসীমা উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।
(The perimeter of a quadrilateral is greater than the sum of its diagonals).

৬। চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। (ক. প্র.)

৭। ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং O একটি অভ্যন্তরস্থ বিন্দু।

প্রমাণ কর যে $(OA+OB+OC+OD)>(AC+BD)$

কোন্ অবস্থায় ইহার ব্যতিক্রম হইবে ?

৮। একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 2″ লম্বা এবং আর একটি বাহু 3″; প্রমাণ কর যে তৃতীয় বাহুটী 5″ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 1″ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৯। কোন ত্রিভুজের "দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

(Any two sides of a triangle are together greater than twice the median which bisects the third side).

ABC ত্রিভুজের AX মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, প্রমাণ করিতে হইবে $(AB+AC)>2\,AX$

AX কে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $XD=AX$; BD সংযুক্ত কর।

AXC, DXB ত্রিভুজদ্বয়ের

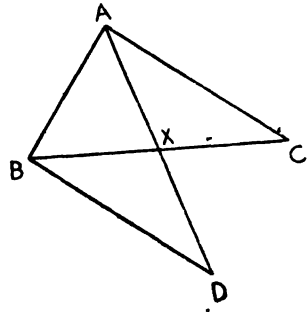
$AX=DX$, $BX=CX$, $\angle AXC=$ বিপ্রতীপকোণ DXB

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপঃ ৪]

$\therefore$ $AC=BD$.

ABD ত্রিভুজের $(AB+BD)>AD$,

কিন্তু $AD=2AX$, এবং $BD=AC$,

$\therefore (AB+AC)>2\,AX$।

১০। ত্রিভুজের পরিসীমা উহার মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর। কিন্তু উহার অর্দ্ধ-পরিসীমা মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(The perimeter of a triangle is greater than the sum of its medians and its semi-perimeter is less than the sum of its medians). (ক. প্র)

উপরে প্রমাণিত হইয়াছে যে $(AB + AC) > 2AX$

উপরের চিত্রে BY এবং CZ মধ্যমা অঙ্কিত করিলে প্রমাণ করা যায় $(AB + BC) > 2\,BY$ এবং $(BC + CA) > 2\,CZ$

∴ যোগ করিয়া $2\,(AB + BC + CA) > 2\,(AX + BY + CZ)$

$\therefore\ (AB + BC + CA) > (AX + BY + CZ)$

আবার, $(AX + BX) > AB$, $(BY + CY) > BC$, এবং $(CZ + AZ) > CA$

∴ যোগ করিয়া $[(AX + BY + CZ) + (BX + CY + AZ)] > (AB + BC + CA)$

$\therefore\ (AX + BY + CZ) > [(AB + BC + CA) - (BX + CY + AZ)]$

অর্থাৎ $> (AB + BC + CA - \frac{1}{2}\,BC - \frac{1}{2}\,CA - \frac{1}{2}\,AB)$

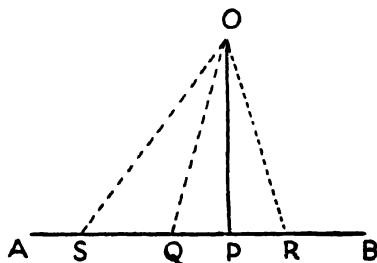
অর্থাৎ $> \frac{1}{2}\,(AB + BC + CA)$

উপপাদ্য ১২

কোন সরল রেখার বহিঃস্থিত কোন বিন্দু হইতে ঐ রেখা পর্যন্ত যত সরল রেখা অঙ্কিত করা যায় তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[Of all straight lines that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest.]

মনে কর, একটি বহিঃস্থ বিন্দু O হইতে AB সরল রেখার উপর OP লম্ব এবং OQ অপর যে কোন একটি সরল রেখা অঙ্কিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OP, OQ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ। OPQ ত্রিভুজের

∠OPQ = এক সমকোণ

∴ ∠OQP একটি সূক্ষ্মকোণ, [অনু ১ উপ ৮

∴ ∠OQP, ∠OPQ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সুতরাং OP, OQ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

এই ভাবে দেখান যাইতে পারে যে, O হইতে AB এর উপর অঙ্কিত যে কোন সরল রেখা হইতে OP ক্ষুদ্রতর। সুতরাং O হইতে AB এর উপর অঙ্কিত সরল রেখাগুলির মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি সরল রেখা পর্যন্ত যতগুলি রেখা টানা যায়, লম্ব ব্যতীত অন্য রেখাগুলিকে **তির্যক** (oblique) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ১। O হইতে AB পর্যন্ত অঙ্কিত সকল সরল রেখার মধ্যে OP যদি ক্ষুদ্রতম হয়, তবে OP, AB এর উপর লম্ব হইবে।

কারণ, OP ব্যতীত অন্য কোন রেখা যদি লম্ব হয় তবে উহা নিশ্চয়ই OP অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। কিন্তু কল্পনানুসারে, OPই ক্ষুদ্রতম, অতএব OPই লম্ব হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। OQ, OR দুইটি তির্যক AB সরল রেখাকে P বিন্দু হইতে সমান দূরে ছেদ করিলে, OP, OQ পরস্পর সমান হইবে।

কারণ, OPQ, OPR ত্রিভুজদ্বয়ের

PQ = PR,

OP সাধারণ বাহু,

এবং $\angle OPQ = \angle OPR$, প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $OQ = OR$

অনুসিদ্ধান্ত ৩। OQ, OS দুইটি তির্যকের OS যদি AB সরল রেখাকে OQ অপেক্ষা P বিন্দু হইতে অধিকতর দূরে ছেদ করে, অর্থাৎ যদি $PS > PQ$ হয়, তবে OS, OQ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

OPQ সমকোণী ত্রিভুজের

$\angle OQP =$ সূক্ষ্ম কোণ,

$\therefore$ উহার সম্পূরক $\angle OQS =$ স্থূল কোণ,

$\therefore$ OQS ত্রিভুজের $\angle OSQ =$ সূক্ষ্ম কোণ,

$\therefore$ $\angle OQS > \angle OSQ$,

$\therefore$ $OS > OQ$

অনুশীলনী

কোণের সমদ্বিখণ্ডকের যে কোন বিন্দু ঐ কোণের বাহুদ্বয় হইতে সমদূরে অবস্থিত।

সমান্তরাল সরল রেখা

এক সমতলে অবস্থিত দুইটি সরল রেখা উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত হইলেও যদি কোন দিকেই পরস্পর ছেদ না করে তবে উহাদিগকে **সমান্তরাল সরল রেখা** (Parallel Straight Lines) বলে।

AB, CD সমান্তরাল সরলরেখা। ইহাদিগকে B ও D এর দিকে কিংবা A ও C এর দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করিলেও রেখা দুইটি ছেদ করিবে না। এইস্থলে দুইটি সর্ত বর্তমান থাকা চাই,—

A———————B
C———————D

(১) রেখা দুইটি একই সমতলে থাকা চাই,

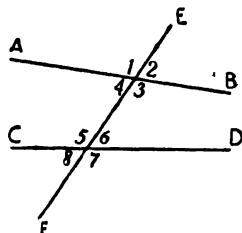
(২) রেখা দুইটি বর্ধিত হইলেও কোন দিকেই ছেদ করিবে না।

একটি রেখা টেবিলের উপর উত্তর হইতে দক্ষিণ দিকে অঙ্কিত হইলে এবং আর একটি রেখা মেঝের (ভিন্ন সমতল) উপর পূর্ব হইতে পশ্চিম দিকে অঙ্কিত হইলে উহাদিগকে যতই কেন বর্ধিত করা হউক না, উহারা কিছুতেই ছেদ করিবে না, কিন্তু তবুও উহারা সমান্তরাল রেখা নহে। আবার যদি টেবিলের উপর একটি রেখা পূর্ব্ব-পশ্চিম এবং আর একটি রেখা উত্তর-দক্ষিণ দিকে অঙ্কিত হয়, তবে উহারা নিশ্চয়ই ছেদ করিবে। সুতরাং উহারা সমান্তরাল রেখা নহে।

যে সমস্ত সরল রেখা বর্ধিত হইলে পরস্পর ছেদ করে উহারা বিভিন্ন দিক্ নির্দেশ করে। কিন্তু যাহারা সমান্তরাল অথবা একই সরল রেখার অন্তর্গত, তাহারা একই দিক্ নির্দেশ করে।

সুতরাং দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে তাহারা উভয়েই একটি তৃতীয় সরল রেখার সমান্তরাল হইতে পারে না ; অথবা কোন বিন্দুর মধ্যদিয়া কোনও নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি মাত্র সরল রেখা অঙ্কিত হইতে পারে। এই সত্যকে **প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ** (Playfair's Axiom) বলে।

যে সরল রেখা দুই বা ততোধিক সরল রেখাকে ছেদ করে উহাকে **ভেদক** (Transversal) বলে।

এই চিত্রে EF রেখাটি ভেদক, কারণ ইহা AB ও CD রেখাদ্বয়কে ছেদ করিয়াছে। চিত্রে দেখ, ইহাতে আটটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে—1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. ইহাদের মধ্যে 1, 2, 7 এবং 8 **বহিঃকোণ** (Exterior angles), এবং 3, 4, 5, এবং 6 **অন্তঃকোণ** (Interior angles) ; 4 এবং 6 আর 3 এবং 5 পরস্পর **একান্তর কোণ** (Alternate angles)।

ভেদকের এক পার্শ্বস্থিত 2 এবং 6 কে **অনুরূপ** (corresponding) **কোণ** বলা হয়। এইরূপ 1 এবং 5, 3 এবং 7, আর 4 এবং 8 অনুরূপ কোণ।

উহাদের মধ্যে 2 কে বহিঃকোণ (exterior angle) এবং 6 কে ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দূরবর্তী অন্তঃকোণ (interior opposite angle on the same side of the cutting line) বলা হয়।

উপপাদ্য ১৩

একটি সরল রেখা অপর দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করিলে যদি

(১) একান্তর কোণগুলি সমান হয়,

কিংবা (২) কোন বহিঃকোণ ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দূরবর্তী অন্তঃকোণের সমান হয়,

কিংবা (৩) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুইটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়,

তবে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সরল রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

[If a straight line cuts two other straight lines so as to make

(i) the alternate angles equal,

or (ii) an exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of it,

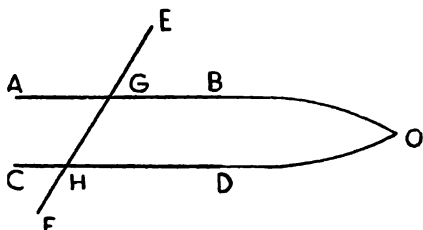
or (iii) the interior angles on the same side together equal to two right angles,

then those two straight lines are parallel.]

মনে কর, EF সরল রেখা AB এবং CD সরলরেখাদ্বয়কে G এবং H বিন্দুতে এরূপ ভাবে ছেদ করিয়াছে যেন

(১) $\angle$AGH = একান্তর কোণ GHD,

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB এবং CD সমান্তরাল।

প্রমাণ। যদি AB এবং CD সমান্তরাল না হয়, তবে হয় B এবং D এর দিকে নতুবা A এবং C এর দিকে বর্ধিত করিলে উহারা পরস্পর ছেদ করিবে। মনে কর, AB এবং CD, B ও D এর দিকে বর্ধিত হইয়া O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন OGH একটি ত্রিভুজ, ইহার OG বাহু A পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে,

অতএব বহিঃকোণ AGH বিপরীত অন্তঃকোণ GHO অপেক্ষা বৃহত্তর; [উপঃ ৮

কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ কল্পনানুযায়ী এই কোণ দুইটি সমান।

∴ AB এবং CD, B ও D এর দিকে বর্ধিত করিলে ছেদ করিতে পারে না।

এইরূপেই দেখান যাইতে পারে, AB এবং CD, A ও C এর দিকে বর্ধিত করিলেও ছেদ করিতে পারে না।

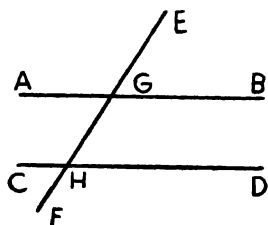
∴ AB এবং CD সমান্তরাল। ই. উ. বি.

(২) মনে কর EF সরল রেখা AB এবং CD সরল রেখাদ্বয়কে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করায় বহিঃকোণ EGB, EF এর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ GHD এর সমান হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB এবং CD সমান্তরাল।

প্রমাণ। যেহেতু $\angle EGB = \angle GHD$,

কিন্তু $\angle EGB =$ বিপ্রতীপ $\angle AGH$,

∴ $\angle AGH = \angle GHD$,

এবং ইহারা একান্তর কোণ,

∴ AB এবং CD সমান্তরাল। ই. উ. বি.

(৩) মনে কর, EF, AB এবং CDকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করায় EFএর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয় BGH এবং GHD একত্র যোগে দুইসমকোণ হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB এবং CD সমান্তরাল।

প্রমাণ। ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ। (কল্পনা)

আবার, সন্নিহিত ∠BGH + ∠AGH = দুই সমকোণ,

∴ ∠BGH + ∠AGH = ∠BGH + ∠GHD,

এই সমান সমান সমষ্টি হইতে ∠BGH বিয়োগ কর।

∴ অবশিষ্ট ∠AGH = অবশিষ্ট ∠GHD,

এবং ইহারা একান্তর কোণ,

∴ AB এবং CD সমান্তরাল। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ১৪

একটি সরল রেখা দুই সমান্তরাল সরল রেখাকে ভেদ করিলে

(১) দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সমান হইবে,

(২) বহিঃকোণ ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দূরবর্তী অন্তঃকোণের সমান হইবে,

(৩) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুইটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

[If a staight line cuts two parallel straight lines, it makes

(i) the alternate angles equal to one another,

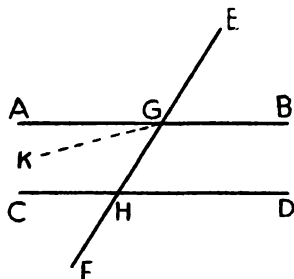
(ii) the exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of it,

and (iii) the two interior angles on the same side together equal to two right angles.]

মনে কর, EF সরল রেখা AB এবং CD সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) ∠AGH = একান্তর ∠GHD,

(২) বহিঃকোণ EGB = দূরবর্তী অন্তঃকোণ GHD,

(৩) EF এর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ BGH ও GHD এর সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ। (১) যদি ∠AGH, ∠GHD এর সমান না হয়,

মনে কর, ∠KGH = ∠GHD এবং উহারা পরস্পর একান্তর।

∴ KG এবং CD সমান্তরাল। [উপ ১৩

আবার কল্পনানুযায়ী AB এবং CD সমান্তরাল।

কিন্তু AB এবং KG পরস্পকে ছেদ করায় উহারা একই সরল রেখা CD এর সমান্তরাল হইতে পারে না। [প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ

∴ ∠AGH ও ∠GHD অসমান নহে,

অর্থাৎ ∠AGH = একান্তর ∠GHD। ই. উ. বি.

(২) ∠EGB = বিপ্রতীপ কোণ AGH,

এবং ∠AGH = একান্তর কোণ GHD, [প্রমাণিত

∴ ∠EGB = ∠GHD। ই. উ. বি.

(৩) $\angle EGB = \angle GHD$ [প্রমাণিত

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত $\angle BGH$ যোগ কর,

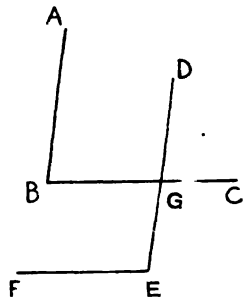
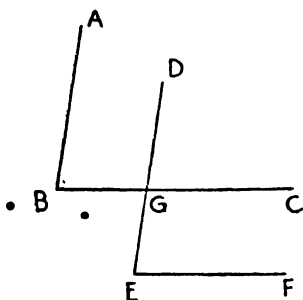
$\therefore \angle EGB + \angle BGH = \angle GHD + \angle BGH$

কিন্তু সন্নিহিত $\angle EGB + \angle BGH =$ দুই সমকোণ

$\therefore \angle BGH + \angle GHD =$ দুই সমকোণ। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য—উপপাদ্য ১৪, উপপাদ্য ১৩ এর বিপরীত।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি একটি কোণের দুই বাহু যথাক্রমে অপর একটি কোণের দুই বাহুর সমান্তরাল হয়, কোণ দুইটি পরস্পর সমান অথবা পরস্পর সম্পূরক হইবে।

[If the two arms of an angle be respectively equal to the two arms of another angle, then these two angles are either equal or supplementary.]

$\angle ABC$ এবং $\angle DEF$ এর AB, DE এর সমান্তরাল এবং BC, EF এর সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে

১ম চিত্রে $\angle ABC = \angle DEF$

২য় চিত্রে $\angle ABC + \angle DEF =$ দুই সমকোণ।

প্রমাণ। ১ম চিত্রে $\angle ABC =$ একান্তর $\angle BGE =$ একান্তর $\angle DEF$

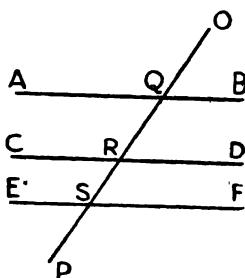
২য় চিত্রে $\angle ABC =$ একান্তর $\angle BGE$

একই পার্শ্বস্থিত অন্তঃকোণ $BGE + DEF =$ দুই সমকোণ

$\therefore \angle ABC + \angle DEF =$ দুই সমকোণ।

উপপাদ্য ১৫

যে সকল সরল রেখার প্রত্যেকটি একই সরল রেখার সমান্তরাল তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

[Straight lines, which are parallel to the same straight line, are parallel to one another.]

মনে কর, AB এবং CD সরল রেখাদ্বয় উভয়ে EF এর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল।

অঙ্কন। মনে কর, OP, AB, CD এবং EF কে যথাক্রমে Q, R এবং S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ। যেহেতু AB ও EF সমান্তরাল।

∴ $\angle$AQS = একান্তর $\angle$QSF [উপ ১৪

আবার, CD এবং EF সমান্তরাল।

∴ বহিঃকোণ QRD = বিপরীত অন্তঃকোণ QSF. [উপ ১৪

∴ $\angle$AQS = $\angle$QRD,

এবং ইহারা একান্তর কোণ,

∴ AB এবং CD সমান্তরাল। [উপ ১৩

ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

যদি AB এবং CD সমান্তরাল না হয় তবে বর্ধিত হইলে উহারা পরস্পর ছেদ করিবে। তাহা হইলে দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিয়া উভয়ে একই সরল রেখার সমান্তরাল হইবে। কিন্তু ইহা অসম্ভব। [প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ

A ——— B

C ——— D

E ——— F

∴ AB এবং CD পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

∴ AB এবং CD সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য। যদি EF, AB এবং CD এর মধ্যে অবস্থিত হয়, তবে ইহা সহজেই বুঝা যায় যে AB যখন EFকে ছেদ করে না তখন EFকে ডিঙ্গাইয়া CDকে কিছুতেই ছেদ করিতে পারে না, সুতরাং AB এবং CD সমান্তরাল।

উপপাদ্য ১৫, প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধের বিপরীত।

অনুশীলনী

১। কোনও সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বগুলি পরস্পর সমান্তরাল হইবে। (Perpendiculars drawn to the same straight line are parallel). [ক. প্র.

২। কোনও সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব উহার সহিত সমান্তরাল যাবতীয় সরলরেখার উপরই লম্ব হইবে।

৩। একটি সরল রেখা অপর দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করিলে যদি একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে উহাদের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

৪। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল করিয়া সরল রেখা অঙ্কিত করিলে, উহা সমান বাহুদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

৫। একই ভূমির উপর দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ বিপরীত দিকে অঙ্কিত করিলে, উৎপন্ন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল হইবে। অর্থাৎ চতুর্ভুজটি সামন্তরিক হইবে। [ক. প্র.

৬। একটি ত্রিভুজের তিনবাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনবাহুর সমান্তরাল হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণ হইবে। [ক. প্র.

৭। দুইটি সরল রেখা যদি অপর দুইটি পরস্পর-ছেদী (intersecting) সরল রেখার উপর লম্ব হয়, তবে ঐ লম্বদ্বয়ও পরস্পর ছেদ করিবে ; এবং লম্বদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমান হইবে।

৮। ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া বহিঃকোণ CE দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, CE যদি ABএর সমান্তরাল হয়, প্রমাণ কর যে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৯। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে উহারা সমান্তরাল হইবে।

১০। ∠BACএর সমদ্বিখণ্ডক রেখা ADএর অন্তর্গত P বিন্দু হইতে AC এর সমান্তরাল করিয়া PQ টানিলে উহা যদি ABকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে PQA একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

১১। কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় দিয়া বাহুত্রয়ের সমান্তরাল রেখাদ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজ মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ।

ব্যবহারিক জ্যামিতি

সম্পাদ্য

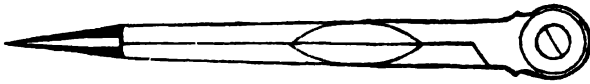
সম্পাদ্যের অঙ্কনের জন্য প্রবেশিকা পরীক্ষার্থীদিগের তিনটি যন্ত্র ব্যবহার করিবার অধিকার আছে। যথা—

(১) **মাপনী** (Scale বা Ruler)। ইহার এক পার্শ্বে ইঞ্চ ও উহার দশমাংশ এবং অপর পার্শ্বে সেন্টিমিটার (Centimetre) ও উহার দশমাংশ মিলিমিটার (Millimetre) অঙ্কিত থাকে। মাপনী দ্বারা

কোনও রেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায় এবং কোন সরল রেখাকে অঙ্কিত ও বর্ধিত করা যায়। যাহাতে ইঞ্চ কিংবা সেণ্টিমিটার অঙ্কিত না থাকে, এইরূপ রুলার দ্বারা সরল রেখা অঙ্কিত ও বর্ধিত হইতে পারে বটে, কিন্তু উহাদ্বারা দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায় না।

মিটার (Metre) দৈর্ঘ্যের ফরাসী মাপ। **milli, centi** এবং **deci,** যথাক্রমে সহস্রাংশ, শতাংশ এবং দশমাংশ অর্থে ব্যবহৃত হয়।

সুতরাং ১০ মিলিমিটার = ১ সেণ্টিমিটার (মিটারের শতাংশ)
১০ সেণ্টিমিটার = ১ ডেসিমিটার (মিটারের দশমাংশ)
১০ ডেসিমিটার = ১ মিটার

(২) **কাঁটা-কম্পাস** (Dividers)—ইহার সাহায্যে দুই বিন্দুর দূরত্ব বা কোন সরলরেখার দৈর্ঘ্য মাপিয়া লওয়া যায়, কিংবা কোন একটি সরল রেখা

হইতে অপর একটি সরল রেখার সমান অংশ কাটিয়া লওয়া যায়।

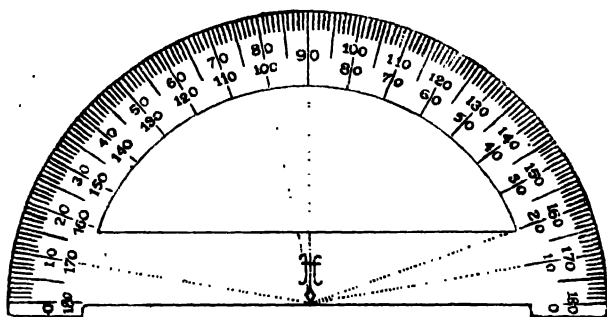
(৩) **পেন্সিল-কম্পাস** (Pencil Compasses)—ইহা বৃত্ত অঙ্কনের জন্য ব্যবহৃত হয়।

দ্রষ্টব্য। (১) অঙ্কন পরিষ্কার হওয়া আবশ্যক। এই জন্য পেন্সিল এরূপ ভাবে কাটিয়া লইবে যেন অগ্রভাগ খুব সরু হয়। একখানা রবার ও ছুরি সর্বদা নিকটে রাখিবে।

(২) অঙ্কনের রেখাগুলি যেন বেশ স্পষ্ট হয়, তবে সময় সময় রেখাগুলির অংশবিশেষ অঙ্কিত করিলেও চলিতে পারে।

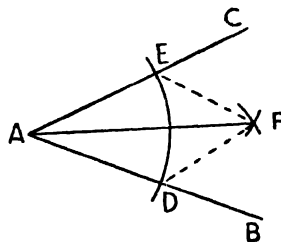
(৩) এই পুস্তকে অঙ্কনের বিশুদ্ধতা প্রমাণের জন্য যেখানে অতিরিক্ত অঙ্কনের আবশ্যক হইয়াছে তাহা বিন্দুদ্বারা অঙ্কিত হইয়াছে।

শিক্ষার্থিগণ ষষ্ঠমানেই এই যন্ত্রগুলির ব্যবহার-প্রণালী শিক্ষা করিয়াছে।

কোণ মাপিবার জন্য আরও একটি যন্ত্র ব্যবহার হয়, তাহার নাম চাঁদা।

চাঁদার ব্যবহার শিক্ষকমহাশয় ছাত্রদিগকে বুঝাইয়া দিবেন। কিন্তু পরীক্ষার সময় শিক্ষার্থিগণ চাঁদা ব্যবহার করিতে পারিবে না, কেবল রুলার ও কম্পাসের সাহায্যে চিত্র অঙ্কিত করিতে পারিবে।

সম্পাদ্য ১

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given angle.]

মনে কর, BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ, ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। Aকে কেন্দ্র করিয়া, যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা AB এবং ACকে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার D এবং Eকে কেন্দ্র করিয়া DE ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর, উহারা F বিন্দুতে ছেদ করিল। AF সংযুক্ত কর। AF, ∠BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। DF ও EF সংযুক্ত কর।

এখন ADF এবং AEF ত্রিভুজদ্বয়ের

AD = AE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

DF = EF (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

AF সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [উপ ৭

∴ ∠DAF = ∠EAF।

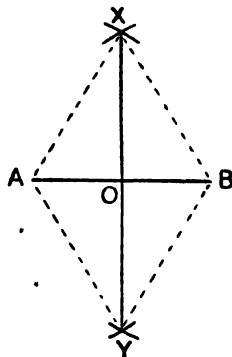
∴ AF, ∠BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। DE ব্যাসার্ধ না লইয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লওয়া যায়, কেবল উহা যেন DEএর অর্ধাংশ হইতে সূক্ষ্মতর না হয়, কারণ সূক্ষ্মতর হইলে চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ করিবে না বা মিলিত হইবে না। সুতরাং অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

এই সম্পাদ্যের সাহায্যে যে-কোন কোণকে চারি, আট, ষোল ইত্যাদি সমান ভাগে ভাগ করা যায়।

সম্পাদ্য ২

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given straight line.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A কে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া AB রেখার উভয় দিকে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। আবার, B কে কেন্দ্র করিয়া BA ব্যাসার্ধ লইয়া AB এর উভয় দিকে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। উহারা পূর্ব্বের অঙ্কিত চাপ দুইটিকে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করিল। XY সংযুক্ত কর। XY, ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB সরল রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

প্রমাণ। AX, XB, AY, YB সংযুক্ত কর।

AXY, এবং BXY ত্রিভুজদ্বয়ের

AX = BX, কারণ প্রত্যেকে ABএর সমান,

XY সাধারণ বাহু,

AY = BY, কারণ প্রত্যেকে AB এর সমান,

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [উপ ৭

∴ ∠AXY = ∠BXY।

আবার, AXO এবং BXO ত্রিভুজদ্বয়ের

$AX = BX$,

XO সাধারণ বাহু,

এবং $\angle AXO = \angle BXO$, (প্রমাণিত)

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [উপ ৪

$\therefore AO = BO$

অর্থাৎ AB, O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। ই. স. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। এই চিত্রে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম বলিয়া $\angle AOX = \angle BOX$, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ, অতএব প্রত্যেকে সমকোণ। সুতরাং এই অঙ্কন দ্বারাই একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার **সমদ্বিখণ্ডক লম্ব** (Perpendicular Bisector) অঙ্কিত করা যায়।

দ্রষ্টব্য—চাপ অঙ্কিত করিতে উহাদের ব্যাসার্ধ AB এর অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর লইলেই হইল, AB এর সমান লইতেই হইবে এমন নয়।

অনুশীলনী

১। একটি সমকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। উহাকে সমান চারিভাগে ভাগ কর। শেষোক্ত প্রত্যেক অংশের পরিমাণ কত?

২। যে-কোন একটি কোণকে সমান আটভাগে ভাগ কর।

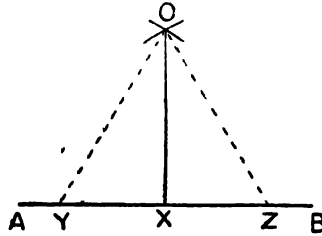
৩। 6″, 5·6″, এবং 3·2″ দীর্ঘ সরলরেখা অঙ্কিত করিয়া উহাদিগকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

৪। 4″ দীর্ঘ একটি সরল রেখাকে সমান আটভাগে ভাগ কর।

৫। ৫ সেণ্টিমিটার ২ মিলিমিটার দীর্ঘ সরলরেখাকে সমান চারিভাগে ভাগ কর।

সম্পাদ্য ৩

একটি সরলরেখার অন্তর্গত কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point in it.]

মনে কর, AB একটি সরলরেখা এবং X উহার অন্তর্গত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

X হইতে AB সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। X বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা ABকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে।

Y ও Z কে কেন্দ্র করিয়া এবং YZ এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর, উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

OX সংযুক্ত কর।

OX, AB সরলরেখার উপর X বিন্দুতে লম্ব হইবে।

প্রমাণ। OY, OZ সংযুক্ত কর।

OXY এবং OXZ ত্রিভুজদ্বয়ের

XY = XZ, (অঙ্কন)

OX সাধারণ বাহু,

এবং OY = OZ, কারণ উভয়েই YZ এর সমান।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ৭

$\therefore \angle OXY = \angle OXZ$,

এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ ;

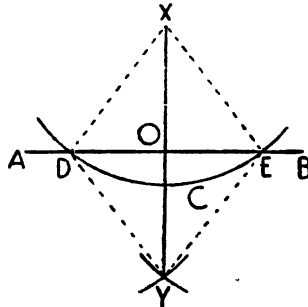
$\therefore$ OXY এবং OXZ উভয়েই সমকোণ।

অর্থাৎ OX, AB এর উপর লম্ব। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। এই স্থলেও YZ ব্যাসার্ধ না লইয়া, YZ এর অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লওয়া যাইতে পারে। এবং চাপ দুইটি AB এর অপরদিকেও O′ বিন্দুতে ছেদ করিলে, O′X, AB এর উপর লম্ব হইবে।

সম্পাদ্য ৪

বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point outside it.]

বহিঃস্থ X বিন্দু হইতে AB সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB এর যে পার্শ্বে X বিন্দু আছে, তাহার বিপরীত পার্শ্বে যে কোনও C বিন্দু লও।

X কেন্দ্র করিয়া এবং XC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর যেন, উহা AB রেখাকে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করে। আবার D এবং E কেন্দ্র কেন্দ্র করিয়া DX ব্যাসার্ধ লইয়া Xএর বিপরীত পার্শ্বে দুইটি চাপ

অঙ্কিত কর, উহারা Y বিন্দুতে ছেদ করিল। XY সংযুক্ত কর। XY, AB রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

XO, AB রেখার উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। DX, DY, EX, EY সংযুক্ত কর।

DXY এবং EXY ত্রিভুজদ্বয়ের

DX = EX,

XY সাধারণ বাহু,

এবং DY = EY, (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ৭

∴ ∠DXY = ∠EXY।

এখন DOX এবং EOX ত্রিভুজদ্বয়ের

DX = EX,

XO সাধারণ বাহু,

এবং ∠DXO = ∠EXO, (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ৪

∴ ∠XOD = ∠XOE।

কিন্তু উহারা সন্নিহিত কোণ,

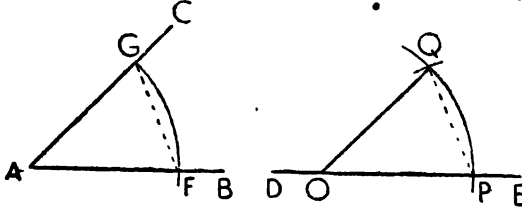
∴ উহাদের প্রত্যেকে সমকোণ,

∴ XO, AB এর উপর লম্ব। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। সম্পাদ্য ৩ এবং সম্পাদ্য ৪ অঙ্কনের আরও দুইটি করিয়া প্রণালী পরে দেখান হইবে।

সম্পাদ্য ৫

একটি সরল রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[At a given point in a given straight line to make an angle equal to a given angle.]

BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ; DE সরলরেখার O বিন্দুতে ∠BAC এর সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ AB এবং AC কে যথাক্রমে F এবং G বিন্দুতে ছেদ করিল। FG সংযুক্ত কর।

আবার, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AF ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ DE কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া FG ব্যাসার্ধ লইয়া আরও একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ ইহার পূর্বে-অঙ্কিত চাপকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

OQ সংযুক্ত কর।

∠POQ, ∠BAC এর সমান হইবে।

প্রমাণ। PQ সংযুক্ত কর।

POQ এবং FAG ত্রিভুজদ্বয়ের

OP = AF, সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ

OQ = AG, ,, ,, ,,

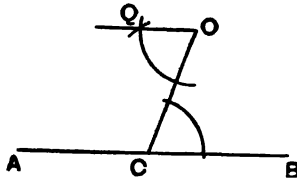
এবং PQ = FG, (অঙ্কন)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ৭

∴ ∠POQ = ∠FAG = ∠BAC। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৬

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দু দিয়া AB সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু C লও, এবং CO সংযুক্ত কর। CO সরলরেখার O বিন্দুতে ৫ম সম্পাদ্যের অঙ্কনের সাহায্যে OCB কোণের সমান COQ একান্তর কোণ অঙ্কিত কর।

OQ সরলরেখা AB সরলরেখার সমান্তরাল হইবে।

প্রমাণ। AB এবং OQ সরলরেখা দুইটিকে OC ছেদ করিয়াছে, এবং ∠QOC = একান্তর ∠OCB,

∴ OQ, ABএর সমান্তরাল। [উপ ১৩

ই. স. বি.

অনুশীলনী

১। একটি সরলরেখার কোন এক বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের পূরক কোণ অঙ্কিত কর।

২। একটি সরলরেখার কোন এক বিন্দুতে, একটি নির্দিষ্ট কোণের সম্পূরক কোণ অঙ্কিত কর।

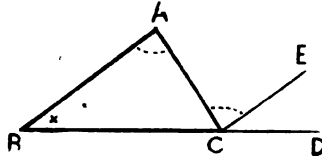
৩। একটি সরল রেখার কোন এক বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের অর্ধ কোণ অঙ্কিত কর।

৪। একটি সরলরেখার কোন এক বিন্দুতে, একটি নির্দিষ্ট কোণের দ্বিগুণ কোণ অঙ্কিত কর।

দ্বিতীয় খণ্ড

উপপাদ্য ১৬

ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ।

[**The three angles of a triangle are together equal to two right angles.**]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠CAB + ∠ABC + ∠BCA = দুই সমকোণ।

অঙ্কন। BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত কর, এবং C বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল CE রেখা অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। AB এবং CE সমান্তরাল, এবং AC উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

∴ ∠ACE = একান্তর কোণ CAB [উপ ১৪

আবার, AB ও CE সমান্তরাল, এবং BD উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

∴ বহিঃকোণ ECD = বিপরীত অন্তঃকোণ ABC। [উপ ১৪

∴ ∠ACE + ∠ECD = ∠CAB + ∠ABC

অর্থাৎ **বহিঃকোণ** ACD = **বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়** CAB ও ABC **এর সমষ্টি।**

উভয় পক্ষে ∠BCA যোগ কর,

∴ ∠ACD + ∠BCA = ∠CAB + ∠ABC + ∠BCA।

কিন্তু $\angle ACD + \angle BCA =$ দুই সমকোণ। (সন্নিহিত কোণ)

$\therefore \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA =$ দুই সমকোণ। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিতে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক সত্য প্রমাণিত হইয়াছে—

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহা বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান।

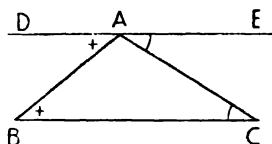
[If one side of a triangle is produced, the exterior angle, thus formed, is equal to the sum of the two interior opposite angles.]

এই প্রতিজ্ঞায় আমরা প্রথমেই প্রমাণ করিয়াছি যে,

$\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC.$

বিকল্প প্রমাণ

অঙ্কন। A বিন্দু দিয়া BC এর সমান্তরাল DE অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। DE এবং BC সমান্তরাল।

$\therefore \angle BCA =$ একান্তর $\angle EAC,$

এবং $\angle ABC =$ একান্তর $\angle BAD,$

$\therefore \angle BCA + \angle ABC = \angle EAC + \angle BAD,$

উভয় পক্ষে $\angle CAB$ যোগ কর।

$\therefore \angle BCA + \angle ABC + \angle CAB = \angle EAC + \angle BAD + \angle CAB$

$=$ সরলকোণ EAD

$=$ দুই সমকোণ। ই. উ. বি.

এই উপপাদ্য হইতে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি সহজেই অনুমেয়—

(১) ABC ত্রিভুজের কোণগুলিকে যথাক্রমে A, B এবং C বলা হয়। সুতরাং $A + B + C = 180^\circ$.

(২) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয়ের অবশিষ্ট কোণ দুইটিও সমান হইবে। অর্থাৎ ত্রিভুজদ্বয় **সদৃশকোণ** (Equiangular) হইবে।

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের, যদি

$A = D$, $B = E$ হয়, তবে $A + B + C = 180° = D + E + F$

$\therefore \quad C = F$.

(৩) সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পূরক কোণ।

$A + B + C = 180°$,

যদি $B = 90° \quad \therefore \quad A + C = 180° - 90° = 90°$, সুতরাং A এবং C পূরক কোণ।

(৪) যে ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সমান, তাহা সমকোণী।

$A + C = B$, কিন্তু $A + B + C = 180° \quad \therefore \; 2B = 180° \quad \therefore \; B = 90°$

(৫) চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

ABCD চতুর্ভুজে BD সংযুক্ত করিলে, উহা ABD এবং CBD ত্রিভুজদ্বয়ে বিভক্ত হইবে।

$\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB = 180°$

$\angle DBC + \angle BCD + \angle CDB = 180°$

যোগ করিয়া, $\angle DAB + \angle ABD + \angle DBC + \angle BCD + \angle CDB + \angle BDA = 360°$

অর্থাৎ $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360° =$ চারি সমকোণ।

(৬) সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ 60°।

ABC সমবাহু ত্রিভুজের $A + B + C = 180°$

কিন্তু $A = B = C \quad \therefore \quad 3A = 3B = 3C = 180°$

$\therefore \quad A = B = C = 60°$.

অতএব বলা যাইতে পারে, সমস্ত সমবাহু ত্রিভুজই সদৃশকোণ।

(৭) সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ 45°এর সমান। কারণ সূক্ষ্মকোণ দুইটি পরস্পর সমান,

এবং তাহাদের সমষ্টি $=90^\circ$,

সুতরাং প্রত্যেকটি কোণ $=90^\circ \div 2 = 45^\circ$.

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে

90° এবং 60°; 72° এবং 36°; 22° $30'$ এবং 112° $30'$ হইলে তৃতীয় কোণের পরিমাণ কত?

২। একটি চতুর্ভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে 75°, 90° এবং 120°, চতুর্থ কোণটির পরিমাণ কত?

৩। কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটির সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 108° এবং 12° হইলে, উহার কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর। [ক. প্র.

৪। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর, যদি

(ক) উহার শিরঃকোণ 30° হয়,

(খ) উহার শিরঃকোণ প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণের অর্ধেক হয়,

(গ) উহার শিরঃকোণ প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণের দ্বিগুণ হয়,

(ঘ) উহার শিরঃকোণ প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণের তিনগুণ হয়।

৫। কোন ত্রিভুজের একটি বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করিলে যদি বহিঃকোণ দুইটি সমান হয়, প্রমাণ কর ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [ক. প্র.

৬। ABC ত্রিভুজের B এবং C কোণদ্বয়কে যথাক্রমে BO এবং CO রেখাদ্বয় সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া O বিন্দুতে ছেদ করিল, প্রমাণ কর যে $\angle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$.

৭। ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুদ্বয় B ও Cএর দিকে D এবং E পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, CBD এবং BCE বহিঃকোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখা BO এবং COর অন্তর্গত কোণ $BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$.

৮। প্রমাণ কর যে কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন বহিঃকোণ, ভূমিসংলগ্ন কোণের সমান হইবে। [ক.প্র.

৯। দুইটি সরলরেখা যথাক্রমে অপর দুইটি সরলরেখার উপর লম্ব হইলে প্রথম রেখা দুইটির অন্তর্ভূ্ত সূক্ষ্মকোণ অপর রেখা দুইটির অন্তর্ভূ্ত সূক্ষ্মকোণের সমান হইবে। [ক. প্র.

১০। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC; BA, D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DA = BA, এবং DC সংযুক্ত কর। প্রমাণ কর যে, DCB একটি সমকোণ।

১১। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ও অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা অতিভুজের অর্ধ। (In a right-angled triangle the line joining the right-angle to the middle point of the hypotenuse is half the hypotenuse). [ক. প্র.; ঢা. বো.

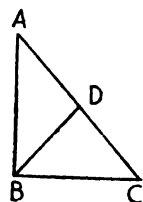
ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ এবং B সমকোণ। B বিন্দু হইতে BD অঙ্কিত কর যেন $\angle CBD$, $\angle ACB$এর সমান হয় এবং BD, ACকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore \angle DBC = \angle DCB \qquad \therefore CD = BD$

$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 90° - \angle ACB.$

$= \angle CAB = \angle DAB$

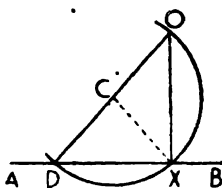
$\therefore AD = BD = CD = \frac{1}{2}AC$

$\therefore$ D, AC এর মধ্যবিন্দু এবং $BD = \frac{1}{2}AC$.

১২। সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অন্য সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজটি ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হইবে। [ক. প্র.

১৩। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হইলে, ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাণ 30° হইবে।

তৃতীয় সম্পাদ্যে X বিন্দুটি যদি সীমান্ত বিন্দু A কিংবা B এর সন্নিকটে অবস্থিত হয়, তবে নিম্নে প্রদর্শিত দ্বিতীয় কিংবা তৃতীয় প্রণালী অবলম্বন করিতে হইবে।

সম্পাদ্য ৩—দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB সরলরেখার বাহিরে যে-কোন বিন্দু C লইয়া CX সংযুক্ত কর। C কে কেন্দ্র করিয়া CX ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন কর, যেন উহা ABকে আবার D বিন্দুতে ছেদ করে। DC সংযুক্ত কর; এবং DC বর্ধিত কর, যেন উহা বৃত্তটিকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OX সংযুক্ত কর।

OX, AB এর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। CX সংযুক্ত কর।

ব্যাসার্ধ বলিয়া $\begin{cases} CD = CX, \quad \therefore \quad \angle CXD = \angle CDX \\ CO = CX, \quad \therefore \quad \angle CXO = \angle COX \end{cases}$

$\therefore \quad OXD = \angle CXD + \angle CXO = \angle CDX + \angle COX$

$= \angle ODX + \angle XOD =$ বহিঃকোণ OXB।

কিন্তু OXD এবং OXB সন্নিহিত কোণ,

$\therefore$ প্রত্যেকেই এক সমকোণ।

সুতরাং OX, X বিন্দুতে ABএর লম্ব। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৩—তৃতীয় প্রণালী

অঙ্কন। X কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া CDE চাপ অঙ্কিত কর, ইহা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। C কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ

লইয়া আর একটি চাপদ্বারা পূর্ব চাপকে D বিন্দুতে ছেদ কর। D কেন্দ্র করিয়া পূর্বোক্ত ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ OE দ্বারা প্রথম চাপটিকে E বিন্দুতে ছেদ কর। সর্বশেষ E বিন্দু কেন্দ্র করিয়া পূর্বোক্ত ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা OE চাপটিকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OX সংযুক্ত কর। OX, AB সরলরেখার উপর X বিন্দুতে লম্ব হইবে।

প্রমাণ। CD, DX, DE, DO, OE এবং EX সংযুক্ত কর।

CDX এবং EDX উভয়েই সমবাহু ত্রিভুজ।

কারণ উহাদের বাহুগুলি সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore \angle CXD = 60°, \angle DXE = 60°.$

DXO এবং EXO ত্রিভুজদ্বয়ের

DX = EX,

OX সাধারণ বাহু,

এবং DO = EO, সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

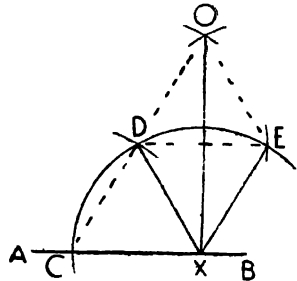
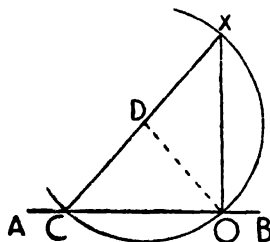
$\therefore \angle DXO = \angle EXO = \frac{1}{2}\angle DXE = 30°,$

$\therefore \angle OXC = \angle OXD + \angle DXC = 30° + 60° = 90°$

= এক সমকোণ

সুতরাং OX, ABএর উপর X বিন্দুতে লম্ব। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। কোনও রেখার অন্তর্গত কোন বিন্দু হইতে লম্ব টানিতে এই প্রণালীটি অনেক সময় ব্যবহৃত হয়।

চতুর্থ সম্পাদ্যেও X বিন্দুটি ABএর কোন সীমান্ত-বিন্দুর সমীপবর্তী হইলে পর পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত দুইটি প্রণালী অবলম্বিত হইতে পারে।

সম্পাদ্য ৪—দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB এর উপর যে কোন বিন্দু C লও। XC সংযুক্ত করিয়া D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। [সম্পাদ্য ২

D কেন্দ্র করিয়া DC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা AB কে C এবং O বিন্দুতে ছেদ করিল। XO সংযুক্ত কর। XO, AB এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। DO সংযুক্ত কর।

ব্যাসার্ধ বলিয়া, DC = DO, $\therefore$ $\angle DOC = \angle DCO$ [উপ ৫

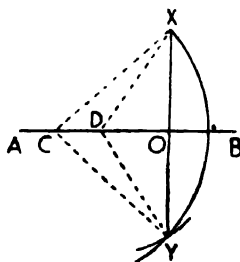
এইরূপ $\angle DOX = \angle DXO$

$\therefore$ $\angle XOC = \angle DOC + \angle DOX = \angle DCO + \angle DXO$
= বহিঃস্থ কোণ XOB

$\therefore$ সন্নিহিত কোণদ্বয় XOC, XOB প্রত্যেকে সমকোণ।

$\therefore$ XO, AB এর উপর লম্ব। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৪—তৃতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB রেখার উপর C এবং D যে-কোন দুই বিন্দু লও। C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CX ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। আবার D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া DX ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর, যেন উহা প্রথমোক্ত চাপকে

ABএর উভয় দিকে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY সংযুক্ত কর যেন উহা AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

XO, AB এর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। CX, CY, DX এবং DY সংযুক্ত কর।

XCD এবং YCD ত্রিভুজদ্বয়ের

CX = CY,

CD সাধারণ বাহু,

এবং DX = DY,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ;

∴ ∠DCX = ∠DCY।

আবার XCO এবং YCO ত্রিভুজদ্বয়ের

CX = CY,

CO সাধারণ বাহু,

এবং ∠XCO = ∠YCO,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ;

∴ ∠COX = ∠COY,

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ,

অতএব ∠COX = এক সমকোণ।

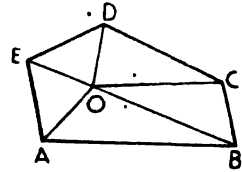
∴ XO, AB এর উপর লম্ব। ই স. বি.

উপপাদ্য ১৬—অনুসিদ্ধান্ত ১

বহুভুজের অন্তঃকোণসমূহের সমষ্টির সহিত চারি সমকোণ যোগ করিলে যোগফল বহুভুজটির বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণের সমান।

(All the interior angles of any rectilineal figure together with four right angles are together equal to twice as many right angles as the figure has sides.)

মনে কর, ABCDE বহুভুজের বাহুসংখ্যা $= n$।
প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ইহার যাবতীয় অন্তঃকোণ $+ 4$ সমকোণ
$= 2n$ সমকোণ।

অঙ্কন। এই ক্ষেত্রটির ভিতরে O একটি বিন্দু লও, এবং কৌণিক বিন্দু A, B, প্রভৃতির সহিত O সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন ক্ষেত্রটি n-সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইয়াছে, এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

$\therefore$ এই n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণসমূহের সমষ্টি $= 2n$ সমকোণ।

কিন্তু এই n ত্রিভুজের যাবতীয় কোণ $=$ বহুভুজের যাবতীয় অন্তঃকোণ
$+$ O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি।

এবং O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি $= 4$ সমকোণ। [উপ ১ অনু ২

$\therefore$ বহুভুজের যাবতীয় অন্তঃকোণ $+ 4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ। ই. উ. বি.

সুতরাং, বহুভুজের যাবতীয় অন্তঃকোণ $= (2n - 4)$ সমকোণ
$= 2(n - 2)$ সমকোণ।

দ্রষ্টব্য। কোন n বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি কোণ D° হইলে,

$n D + 4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ।

$\therefore$ $n D = (2n - 4)$ সমকোণ

$= (2n - 4) \times 90^\circ$.

$$\therefore \ D = \frac{(2n-4)\times 90^\circ}{n} = (2-\frac{4}{n})\times 90^\circ$$

$$= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

∴ বহুভুজের বাহুসংখ্যা দেওয়া থাকিলে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি, এবং অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি দেওয়া থাকিলে বাহুসংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, বহুভুজের বাহুসংখ্যা $= 6$

সুতরাং, অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $= (2\times 6-4)$ সমকোণ

$= (12-4)$ „

$= 8$ „

মনে কর, অন্তঃকোণের সমষ্টি $= 12$ সমকোণ।

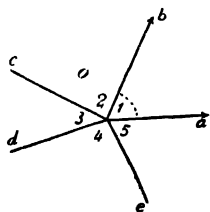
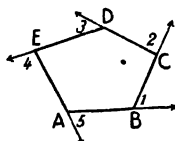
সুতরাং বাহুসংখ্যা $= \dfrac{\text{অন্তঃকোণের সমষ্টি} + 4 \text{ সমকোণ}}{2 \text{ সমকোণ}}$

$$= \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

উপপাদ্য ১৬—অনুসিদ্ধান্ত ২

প্রবৃদ্ধকোণ-বিরহিত বহুভুজের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একই দিকে বর্ধিত করিলে, উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হইবে।

(If the sides of a rectilineal figure which has no re-entrant angle, are produced in order, the exterior angles so formed are together equal to four right angles.)

মনে কর, ABCDE বহুভুজের বাহুসংখ্যা $= n$, এবং ইহার বাহু AB, BC, CD প্রভৃতি দিকে বর্ধিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি $= 4$ সমকোণ।

প্রমাণ। প্রত্যেক শীর্ষে, অন্তঃকোণ + বহিঃকোণ $= 2$ সমকোণ।

কিন্তু n শীর্ষ আছে,

$\therefore$ সমস্ত অন্তঃকোণ + সমস্ত বহিঃকোণ $= 2n$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১ অনুযায়ী

সমস্ত অন্তঃকোণ $+ 4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ।

$\therefore$ সমস্ত বহিঃকোণ $= 4$ সমকোণ। ই. উ. বি,

বিকল্প প্রমাণ

O একটি বিন্দু লইয়া AB, BC, CD প্রভৃতি বাহুগুলির সমান্তরাল করিয়া Oa, Ob, Oc ইত্যাদি রেখাগুলি ঐ বাহুগুলি যে যে দিকে বর্ধিত হইয়াছে সেই সেই দিকে অঙ্কিত কর।

Oa এবং Ob যথাক্রমে AB এবং BC এর সমান্তরাল,

$\therefore \angle aOb =$ বহিঃকোণ B (1)

এইরূপ $\angle bOc =$ বহিঃকোণ C (2)

$\angle cOd =$ " D (3)

$\angle dOe =$ " E (4)

$\angle eOa =$ " A (5)

সুতরাং বহিঃকোণগুলির সমষ্টি $=$ O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি

$= 4$ সমকোণ। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য—একটি n বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কোন বাহু বর্ধিত করিলে, যদি উৎপন্ন কোণটির পরিমাণ $D°$ হয়, তবে $nD = 4$ সমকোণ $= 360°$

$$\therefore D = \frac{360°}{n}.$$

কোন সুষম্ বহুভুজের প্রত্যেক বহিঃকোণ 60° হইলে, উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর বাহু সংখ্যা $= n$

$$\therefore n \times 60^\circ = 360^\circ \quad \therefore n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$

অনুশীলনী

১। বহুভুজের বাহুসংখ্যা 5, 6 এবং 15 হইলে, প্রত্যেক স্থলে অন্তঃ-কোণগুলির সমষ্টি কত হইবে?

২। অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি 8 সমকোণ, 12 সমকোণ এবং 20 সমকোণ হইলে বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত?

৩। পঞ্চভুজের অন্তঃকোণসমূহের সমষ্টি কত? [ক. প্র.

৪। কোন ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি, ক্রমান্বয়ে বর্ধিত বাহুদ্বারা উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টির সমান হইলে, উহার বাহুসংখ্যা কত?

৫। কোন সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা n হইলে, উহার প্রত্যেক কোণ $\frac{2n-4}{n}$ সমকোণের সমান। একটি কোণবিন্দুর সহিত অপর কোণবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া ইহা প্রমাণ কর।

৬। কোন সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা 8 ও 15 হইলে প্রত্যেক স্থলে এক একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ কত?

৭। সুষম বহুভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে বহিঃকোণ যদি 60° এবং 45° হয়, তবে প্রত্যেক স্থলে বাহুসংখ্যা কত?

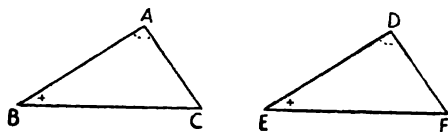
৮। কোন চতুর্ভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ 60° হইলে, উহা সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

১০। যে যুগ্মসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের কোণগুলি একান্তরভাবে (alternately) 130° এবং 158°, তাহার ভুজসংখ্যা কত?

উপপাদ্য ১৭

এক ত্রিভুজের দুই কোণ এবং এক বাহু, অপর এক ত্রিভুজের দুই কোণ এবং অনুরূপ বাহুর সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two triangles have two angles and one side of one equal to two angles and the corresponding side of the other, then the triangles are equal in all respects.]

মনে কর, ABC এবং DEF ত্রিভুজের

$\angle A = \angle D$,

$\angle B = \angle E$,

এবং বাহু BC = অনুরূপ বাহু EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

প্রমাণ। $\angle A + \angle B + \angle C$ = দুই সমকোণ [উপ ১৬

$= \angle D + \angle E + \angle F$,

কিন্তু $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$,

$\therefore \angle C = \angle F$.

এখন $\triangle ABC$কে $\triangle DEF$এর উপর এরূপ ভাবে স্থাপন কর যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BC বাহু EF বাহুর উপর, এবং A বিন্দু EF এর যেই দিকে D বিন্দু আছে সেই দিকে পড়ে।

যেহেতু, BC = EF, $\therefore$ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পতিত হইবে।

আবার $\angle B = \angle E$, সুতরাং BA, EDএর উপর পড়িবে,

এবং $\angle C = \angle F$, সুতরাং CA, FDএর উপর পড়িবে।

অর্থাৎ A বিন্দু, ED এবং FD উভয় সরল রেখার উপর পড়িল। সুতরাং A বিন্দু, ED এবং FD এর একমাত্র সাধারণ বিন্দু D এর উপরই পতিত হইবে।

∴ △ ABC △ DEF এর উপর সমাপতিত হইল।

∴ △ ABC এবং △ DEF সর্বসম। ই. উ. বি.

সুতরাং AB = DE,

AC = DF, অর্থাৎ অনুরূপ বাহুগুলি পরস্পর সমান,

এবং △ABCএর ক্ষেত্রফল △DEFএর ক্ষেত্রফলের সমান।

অনুশীলনী

১। দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় এবং এক একটি সূক্ষ্মকোণ সমান হইলে, উহারা সর্বসম।

২। কোন ত্রিভুজের একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা বিপরীত বাহুর লম্ব হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৩। কোনও কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার উপর প্রত্যেক বিন্দু উহার বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী। [ঢা. বো.

৪। ABC ত্রিভুজের ∠Aএর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, AB এবং AC হইতে D বিন্দু সমদূরবর্তী।

৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি পরস্পর সমান।

৬। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC। BD এবং CE যথাক্রমে ∠B এবং ∠Cকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া AC এবং ABকে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর BD = CE। [ক. প্র.

দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা

প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি করিয়া অঙ্গ আছে—তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ। সুতরাং যখন দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হয়, তখন একটির ছয়টি অঙ্গ যথাক্রমে অপরটির ছয়টি অঙ্গের সমান হইবে।

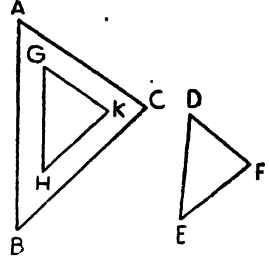
কিন্তু আমরা জানি, দুইটি ত্রিভুজের

(১) **দুই বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান** হইলে উহারা সর্বসম, [উপ ৪

(২) **তিন বাহু পরস্পর সমান** হইলে উহারা সর্বসম, [উপ ৭

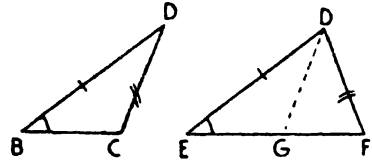
(৩) **দুই কোণ এবং একটি অনুরূপ বাহু সমান** হইলে উহারা সর্বসম। [উপ ১৭

এই সমস্ত স্থলে দেখা যাইতেছে যে, তিন তিনটি অঙ্গ সমান বলিয়া ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। কিন্তু যে-কোন তিন তিনটি অঙ্গ পরস্পর সমান হইলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বদা সর্বসম হয় না। যথা :—

(১) এক ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর অপর ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম না-ও হইতে পারে। এই চিত্রে $\angle A = \angle D = \angle G$; $\angle B = \angle E = \angle H$: $\angle C = \angle F = \angle K$ । কিন্তু উহাদের ক্ষেত্রফল কিংবা বাহুগুলি অসমান।

(২) একটি ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের কোনটির বিপরীত কোণ অপর এক ত্রিভুজের দুই বাহু ও অনুরূপ কোণের সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সাধারণতঃ সর্বসম নহে।

এই চিত্রে $AB = DE$, $AC = DF$,

$\angle ABC = \angle DEF$

অথবা $= \angle DEG$ ।

অতএব DFএর দুইপ্রকার অবস্থান হইতে পারে—DF কিংবা DG।

DG বাহু লইলে, $\angle ACB = \angle DGE$, এবং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

কিন্তু DF বাহু লইলে, $\angle DFG = \angle DGF = \angle DGE$ এর সম্পূরক

$= \angle ACB$ এর সম্পূরক।

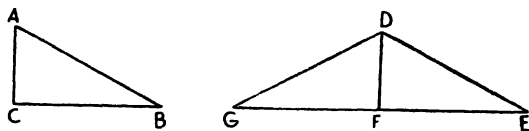
সুতরাং এই স্থলে অপর সমান বাহুযুগলের (AB এবং DE) বিপরীত কোণদ্বয় হয় সমান নতুবা পরস্পর সম্পূরক হইবে। সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

অতএব নির্দিষ্ট কল্পনা হইতে দুইটি বিভিন্ন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়। এই জন্য ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে ইহাকে সংশয়াত্মক স্থল (Ambiguous Case) বলা হয়।

যদি ∠ACB এবং ∠DFE উভয়েই সূক্ষ্ম কিংবা স্থূল হয় তাহা হইলে উহারা পরস্পর সমান হইবেই, কারণ এই ক্ষেত্রে উহারা পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে না; সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। আবার যদি ∠ACB এবং ∠DFE উভয়েই সমকোণ হয়, তবে ত উহারা সমানই হইল, সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। যদি নিদিষ্ট সমান কোণ দুইটি সমকোণ হয়, তাহা হইলে অষ্টাদশ উপপাদ্যানুযায়ী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

উপপাদ্য ১৮

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহু যথাক্রমে অন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two right-angled triangles have their hypotenuses equal and one side of one equal to one side of the other, then the triangles are equal in all respects.]

মনে কর, সমকোণী ত্রিভুজ ABC এবং DEF-এর

অতিভুজ AB = অতিভুজ DE,

এবং AC বাহু = DF বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, △ABC এবং △DEF সর্বসম।

প্রমাণ। △ABCকে △DEF এর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর, AC বাহু DF বাহুর উপর এবং D বিন্দু DFএর যে পার্শ্বে E বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে (G বিন্দুর উপর) পড়ে।

যেহেতু AC = DF, .. C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

সুতরাং △DFG, △ACBএর নূতন অবস্থান।

যেহেতু ∠DFE এবং ∠DFG উভয়েই সমকোণ।

∴ EFG একটি সরল রেখা। [উপ ২

এখন DG = AB = DE,

∴ △DEGএর ∠DEG = ∠DGE। [উপ ৫

DEF এবং DGF ত্রিভুজদ্বয়ের

∠DEF = ∠DGF,

∠DFE = ∠DFG

এবং DF সাধারণ বাহু, [উপ ১৭

∴ △DGF এবং △DEF সর্বসম।

অর্থাৎ △ABC এবং △DEF সর্বসম। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে উহা ভূমি, শিরঃকোণ এবং ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [ক. প্র.

[The perpendicular drawn from the vertex of an isosceles triangle to the base, bisects the base, the vertical angle and the triangle.]

২। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [পা. বি.

৩। কোন বিন্দু একটি কোণের বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইলে বিন্দুটি উক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকারকের উপর অবস্থিত হইবে।

৪। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ক. প্র.

[The diagonals of a rhombus bisect one another at right angles.]

ত্রিভুজ অঙ্কন

ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে তিনটি অসংবদ্ধ (independent) অঙ্গ নির্দিষ্ট থাকা চাই—

(১) তিনটি বাহু,

(২) দুইটি বাহু এবং অন্তর্গত কোণ,

(৩) একটি বাহু এবং উহার সংলগ্ন কোণদ্বয়,

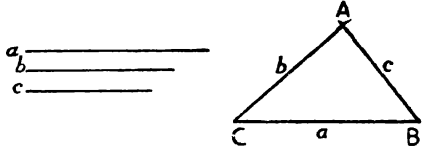
(৪) দুইটি কোণ এবং উহাদের একটির বিপরীত বাহু,

(৫) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহু,

(৬) দুই বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

কিন্তু যদি তিনটি কোণ দেওয়া থাকে তাহা হইলে উহারা পরস্পর অসংবদ্ধ নহে, যেহেতু দুইটি কোণ দেওয়া থাকিলেই তৃতীয় কোণের পরিমাণ জানা যায়। এই স্থলে সমান-কোণবিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়।

সম্পাদ্য ৭

(১) ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given the three sides.]

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে a, b এবং c সরল রেখাত্রয়ের সমান দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BC সরল রেখা a বাহুর সমান করিয়া অঙ্কিত কর।

B কেন্দ্র করিয়া c এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এবং C কেন্দ্র করিয়া bএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ দুইটি A বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB এবং AC সংযুক্ত কর।

ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজের

BC $= a$ [অঙ্কন

CA $= b$,,

এবং AB $= c$,,

∴ ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ। ই. স. বি.

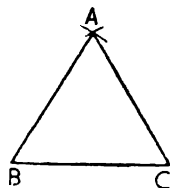
দ্রষ্টব্য। BCএর অপর পার্শ্বেও চাপ দুইটি ছেদ করিতে পারে। সুতরাং একই অঙ্কনে আর একটি সর্বতোভাবে সমান ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

১১শ উপপাদ্যানুযায়ী a, b এবং c যে-কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া চাই, নতুবা অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

বাহু তিনটি, তিনটি রেখার সমান দেওয়া থাকিতে পারে, অথবা উহাদের দৈর্ঘ্যের মাপ দেওয়া থাকিতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত ১। সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। **[To construct an equilateral triangle having given its side.]**

মনে কর, BC বাহুটি দেওয়া আছে, একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

B এবং Cকে কেন্দ্র করিয়া BC ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর, উহারা A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB এবং AC সংযুক্ত কর ; ABC সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ। অঙ্কন দ্বারা $CA = BC = AB$,

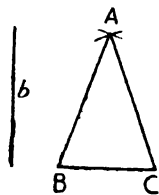
সুতরাং $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = \frac{1}{3}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) = \frac{1}{3}(180°) = 60°$ ।

অতএব এই অঙ্কন দ্বারা আমরা একটি 60° কোণ অঙ্কিত করিতে পারি, এবং উহা সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া 30° কোণ অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

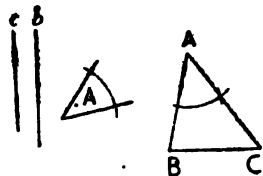
[To construct an isosceles triangle having given the base and one side.]

মনে কর, BC ভূমি এবং একটি বাহু *b* দেওয়া আছে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

B কেন্দ্র করিয়া *b* ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, এবং C কেন্দ্র করিয়া *b* ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব চাপকে A বিন্দুতে ছেদ করে। AB এবং AC সংযুক্ত কর। ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

(২) ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূক্ত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

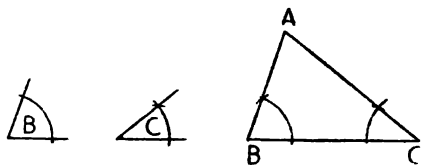
[Given two sides and the included angle, to construct the triangle.]

মনে কর *b*, *c* বাহুদ্বয় এবং অন্তর্গত কোণ A দেওয়া আছে।

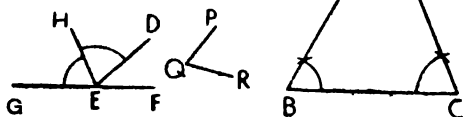
*b*এর সমান করিয়া AC সরল রেখা অঙ্কিত কর। A বিন্দুতে ∠Aএর সমান করিয়া ∠CAB অঙ্কিত কর এবং AB, *c* এর সমান করিয়া ছেদ কর। BC সংযুক্ত কর। ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

(৩) ত্রিভুজের একটি বাহু এবং সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Given one side and the angles at its extremities, to construct the triangle.]

মনে কর, BC বাহু এবং উহার সংলগ্ন কোণদ্বয় B এবং C দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

B কোণের সমান B বিন্দুতে ∠CBA অঙ্কিত কর, এবং ∠Cএর সমানC বিন্দুতে ∠BCA অঙ্কিত কর। BA এবং CA, A বিন্দুতে ছেদ করিল।

ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

(৪) মনে কর, A (DEF) ও C (PQR) কোণদ্বয় এবং A কোণের বিপরীত বাহু BC দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Given two angles and a side opposite to one of them, to construct the triangle.]

অঙ্কন। FE, G পর্যন্ত বর্ধিত কর। E বিন্দুতে $\angle PQR$এর সমান DEH কোণ অঙ্কিত কর।

স্থতরাং $\angle DEF + \angle DEH + \angle GEH =$ দুই সমকোণ।

$\angle DEF = \angle A, \quad \angle DEH = \angle PQR = \angle C$

$\therefore \angle GEH =$ ত্রিভুজটির অবশিষ্ট কোণ B।

এখন B বিন্দুতে $\angle GEH$এর সমান $\angle CBA$ অঙ্কিত কর। এবং C বিন্দুতে $\angle C$এর সমান $\angle BCA$ অঙ্কিত কর। BA এবং CA, A বিন্দুতে ছেদ করিল।

ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

অনুশীলনী

একটি সমকোণকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

[To trisect a right angle.]

$\angle ABC$ একটি সমকোণ।

BC বাহুর উপর D বিন্দু লও।

এবং BDএর উপর EBD সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

$\angle ABC = 90^\circ, \ \angle EBD = 60^\circ,$

$\therefore \angle ABE = 30^\circ = \frac{1}{3} \angle ABC$।

এখন $\angle EBD$কে BF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

$\therefore \angle EBF = \angle FBC = 30^\circ = \frac{1}{3} \angle ABC.$

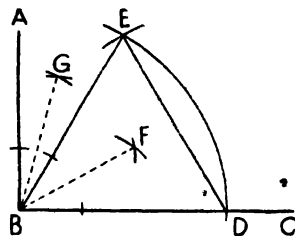
স্থতরাং BE এবং BF, সমকোণ ABCকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিল।

দ্রষ্টব্য। $\angle ABE$কে BG রেখাদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিলে,

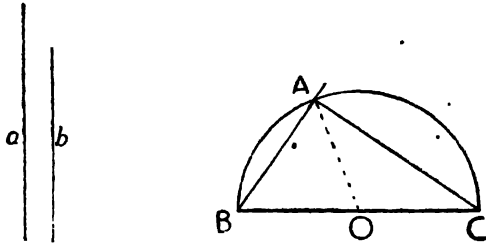
$\angle ABG = \angle GBE = 15^\circ,$

$\angle FBG = \angle FBE + \angle EBG = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ,$

এবং $\angle CBG = 75^\circ.$

স্থতরাং রুলার ও কম্পাস দ্বারা আমরা $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ এবং উহাদের অর্ধাংশ, চতুর্থাংশ ইত্যাদি অঙ্কিত করিতে পারি।

সম্পাদ্য ৮

(৫) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and one side.]

মনে কর, অতিভুজ a এবং একটি বাহু b দেওয়া আছে।

অঙ্কন। aর সমান করিয়া BC অঙ্কিত কর। BCকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O কেন্দ্র করিয়া OB ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তার্ধ BAC অঙ্কিত কর। C কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ দ্বারা বৃত্তার্ধের পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ কর। AB, AC সংযুক্ত কর।

ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। OA সংযুক্ত কর।

$OB = OA, \quad \therefore \angle OAB = \angle OBA,$ [উপঃ ৫

$OC = OA, \quad \therefore \angle OAC = \angle OCA,$ „ „

$\therefore \angle CAB = \angle OAB + \angle OAC = \angle OBA + \angle OCA$

$= \angle ABC + \angle BCA = \frac{1}{2} \times$ দুই সমকোণ = একসমকোণ

এবং $BC = a$, $CA = b$, (অঙ্কন)

$\therefore$ ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ। ই. স. বি.

বিকল্প অঙ্কন

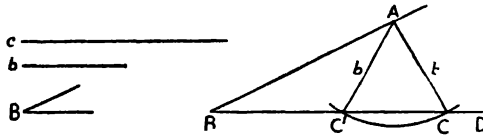
অঙ্কন। bএর সমান AC রেখা টান। A বিন্দুতে ACএর লম্ব AB অঙ্কিত কর। C কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা ABকে B বিন্দুতে ছেদ করে। BC সংযুক্ত কর।

ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। অঙ্কন দ্বারা AC = b, BC = a, ∠BAC = সমকোণ। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৯

(৬) কোন ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle, having given two sides and an angle opposite to one of them.]

মনে কর, একটি ত্রিভুজের দুই বাহু b ও c, এবং b এর বিপরীত কোণ B দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD একটি সরল রেখা লও। B বিন্দুতে B কোণের সমান করিয়া DBA কোণ অঙ্কিত কর। BA সরল রেখা হইতে Cএর সমান BA অংশ কাটিয়া লও।

A কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্ত যদি BDকে Bএর একই পার্শ্বে C এবং C′ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে এবং AC ও AC′ সংযুক্ত করা হয়, তাহা হইলে △ABC এবং △ABC′ উভয়েই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

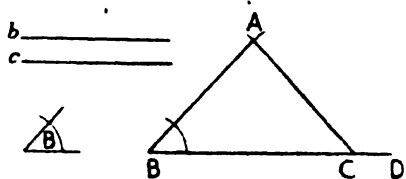
প্রমাণ। অঙ্কন দ্বারা $\angle ABC = \angle B$, $AB = c$, AC অথবা $AC' = b$

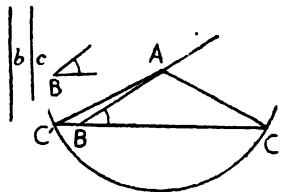
ই. স. বি.

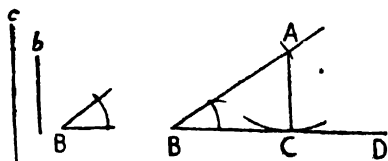
এই স্থলে দুইটি ত্রিভুজ হওয়াতে ইহাকে ত্রিভুজ অঙ্কনের দ্ব্যর্থক স্থল (ambiguous case) বলা হয়। b যদি c অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু BD রেখা হইতে A বিন্দুর দূরত্ব অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবেই এইরূপ দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভবপর হইবে।

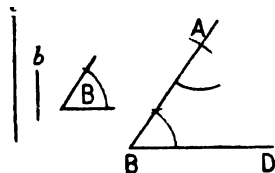
দ্রষ্টব্য। b, c অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হইতে পারে অথবা BD হইতে Aএর দূরত্ব অপেক্ষা বৃহত্তর না হইতে পারে। ইহাতে নিম্নলিখিত অবস্থাগুলির উদ্ভব হইবে।

(১) $b = c$

এই স্থলে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে, বৃত্তাংশটি BDকে Bতে ছেদ করিবে।

(২) $b > c$

এই স্থলে C এবং C', Bএর উভয় দিকে অবস্থিত। দুইটি ত্রিভুজ ABC ও ABC' হইলেও, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে; ABC' হইতে পারে না, কারণ $\angle ABC'$, $\angle ABC$ এর সম্পূরক। যদি $\angle B$ সমকোণ হয় তবে উভয়েই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে বটে, কিন্তু সেই ক্ষেত্রে দ্ব্যর্থক স্থল বলা যায় না, কারণ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

(৩) $b < c$, কিন্তু BD হইতে Aএর দূরত্বের সমান।

এই স্থলে বৃত্তটি BDকে এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। সুতরাং একটি ত্রিভুজ ABC হইবে।

(৪) $b<c$, কিন্তু BD হইতে Bএর দূরত্ব অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

এই স্থলে বৃত্তটি BDকে ছেদই করিবে না, সুতরাং ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নহে।

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের নিম্নলিখিত অঙ্গগুলি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর :—

(১) $a=2''$, $b=3''$, $c=4''$

(২) $a=5''$, $b=4''$, $c=3''$

(৩) $a=4$ সে. মি, $b=5$ সে. মি, $c=6$ সে. মি

(৪) $a=6''$, $b=4''$, $\angle C=90°$

(৫) $a=5''$, $c=7''$, $\angle A=135°$

(৬) $c=3''$, $\angle B=90°$, $\angle A=45°$

(৭) $a=2''$, $\angle B=60°$, $\angle C=30°$

(৮) $b=2''$, $c=2{\cdot}5''$, $\angle B=45°$

২। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 10″ এবং একটি বাহু 5″, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহু 3″ এবং 4″, উহার অতিভুজের পরিমাণ মাপিয়া নির্ণয় কর।

৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5″ এবং একটি সূক্ষ্মকোণ 60°, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। ভূমি 6 সে, মি, এবং বাহুদ্বয় ৩ সে, মি এবং 5 সে, মি হইলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। ত্রিভুজটির উচ্চতা মাপিয়া নির্ণয় কর। (প্রত্যেক অঙ্কনের চিহ্ন প্রদর্শন করিতে হইবে)। [ক. প্র.]

৬। বাহুত্রয়ের পরিমাণ 3″, 4″ এবং 5″, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। উহার দুইটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে যে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় কর। (প্রত্যেক অঙ্কনের চিহ্ন প্রদর্শন করিতে হইবে)। [ক. প্র.]

৭। উপরোক্ত (৬) সংখ্যক প্রতিজ্ঞায় ছেদবিন্দু হইতে বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বগুলি পরস্পর সমান, মাপিয়া প্রমাণ কর।

৮। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য এবং

(ক) শিরঃকোণ দেওয়া আছে,

(খ) ভূমি দেওয়া আছে,

(গ) একটি বাহু দেওয়া আছে,

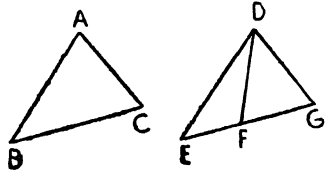
প্রত্যেক স্থলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

১০। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

কয়েকটি অতিরিক্ত উপপাদ্য

১। একটি ত্রিভুজের দুইবাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুইবাহুর পরস্পর সমান হয়, তবে উহাদের মধ্যে যাহার অন্তর্ভূত কোণ বৃহত্তর হইবে তাহার ভূমিও বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of one equal to two sides of the other, each to each, then the base of that which has the included angle greater than that of the other, is greater than the base of the other]

মনে কর, ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয়ের
AB = DE, AC = DF,
কিন্তু ∠BAC > ∠EDF।
প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC ভূমি EF ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ। △ABC কে △DEFএর উপর এমনভাবে স্থাপন কর, যেন A, D এর উপর পড়ে, এবং AB, DE এর উপর পড়ে।

কিন্তু AB = DE, ∴ Eএর উপর Bএর সমাপতন হইবে।

AC এবং BC এর নূতন অবস্থিতি যথাক্রমে DG এবং EG হইল।

কিন্তু ∠BAC > ∠EDF,

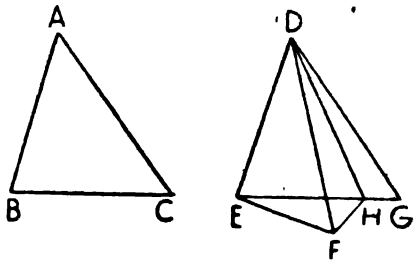
সুতরাং DF, EDG কোণের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

এই অবস্থায়, EG বাহু হয় EFএর সহিত একই সরল রেখার অন্তর্গত হইবে, নতুবা EF হইতে ভিন্ন সরল রেখা হইবে।

(১) যদি EG এবং EF একই সরল রেখার অন্তর্গত হয় (১ম চিত্র)।

EG > EF, ∴ BC > EF।

(২) যদি EG এবং EF, পৃথক পৃথক সরল রেখা হয় (দ্বিতীয় চিত্র)।

∠FDGকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া DH অঙ্কিত কর। DH, EGকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। FH সংযুক্ত কর।

এখন DFH এবং DGH ত্রিভুজদ্বয়ের

DF = DG,

DH সাধারণ বাহু,

এবং ∠FDH = ∠GDH,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

∴ HF = HG।

কিন্তু EH + HF, EF অপেক্ষা বৃহত্তর,

∴ EH + HG, EF অপেক্ষা বৃহত্তর।

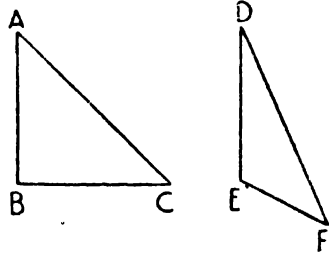
কিন্তু EH + HG = EG = BC,

∴ BC, EF অপেক্ষা বৃহত্তর। ই. উ. বি.

২। যদি একটি ত্রিভুজের দুইবাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একটির ভূমি অপরটির ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে বৃহত্তর ভূমির বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর ভূমির বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of one respectively equal to the two sides of the other, but the base of the one greater than the base of the other, then the angle opposite to the greater base is greater than the angle opposite to the less.]

মনে কর, ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয়ের AB = DE, AC = DF, কিন্তু BC ভূমি EF ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BAC > ∠EDF.

প্রমাণ। যদি ∠A, ∠D অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে

হয় ∠A = ∠D, নতুবা ∠A < ∠D.

কিন্তু ∠A, ∠Dএর সমান হইলে, ইহারা অন্তর্ভূত কোণ বলিয়া ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ '৪

সুতরাং BC = EF, কিন্তু কল্পনানুযায়ী BC > EF,

∴ ∠D, ∠Eএর সমান হইতে পারে না।

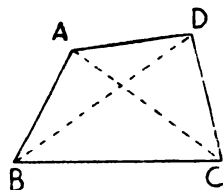
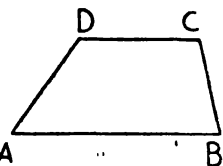
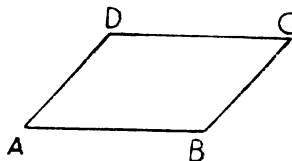
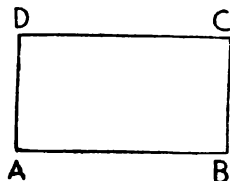
আবার $\angle A$, $\angle D$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, ভূমি BC, ভূমি EF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, [(১) অঃ উপ।

কিন্তু কল্পনানুযায়ী ইহা অসম্ভব।

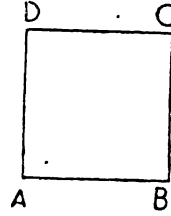
$\therefore$ $\angle D$, $\angle E$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও হইতে পারে না।

$\therefore$ $\angle D$, $\angle E$ অপেক্ষা বৃহত্তর। ই. উ. বি.

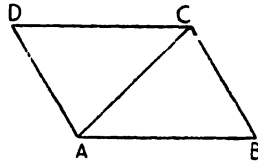
সামন্তরিক (Parallelogram)

১। যে সমতল ক্ষেত্রের চারিটি বাহু, তাহাকে **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral) বলে। বিপরীত কোণ-বিন্দুর সংযোজক রেখার নাম **কর্ণ** (Diagonal)। এই চিত্রে AC এবং BD কর্ণ।

২। যে চতুর্ভুজের কেবল দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল, তাহাকে **ট্রাপিজিয়ম** (Trapezium) বলে। পার্শ্বের চিত্রে দুইটি বিপরীত বাহু AB এবং CD সমান্তরাল, কিন্তু AD এবং BC বাহুদ্বয় সমান্তরাল নহে। এই জন্য ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম।

৩। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহার নাম **সামন্তরিক** (Parallelogram)।

৪। যে সামন্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে। পরে প্রমাণিত হইবে যে, আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণই সমকোণ।

৫। যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে, তাহাকে **রম্বস** (Rhombus) বলে।

৬। যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে।

পরে প্রমাণিত হইবে, বর্গক্ষেত্রের সমস্ত কোণই সমকোণ।

উপপাদ্য ১৯

সামন্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি এবং বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান, এবং প্রত্যেক কর্ণ সামন্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The opposite sides and angles of a parallelogram are equal, and each diagonal bisects the parallelogram.]

মনে কর, ABCD সামন্তরিকের AC একটি কর্ণ, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) AB = বিপরীত বাহু CD, এবং BC = বিপরীত বাহু DA,

(২) $\angle$ABC = বিপরীত $\angle$CDA, এবং $\angle$BCD = বিপরীত $\angle$DAB,

(৩) $\triangle$ABCএর ক্ষেত্রফল = $\triangle$CDAর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ। ABএবং CD সমান্তরাল, AC উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore$ $\angle$BAC = একান্তর $\angle$DCA, [উপ ১৩

আবার, BC এবং DA সমান্তরাল, AC উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore$ $\angle$DAC = একান্তর $\angle$BCA।

এখন ABC এবং CDA ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle BAC = \angle DCA$,

$\angle BCA = \angle DAC$,

এবং AC সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ১৭

অর্থাৎ (১) $AB = CD$, এবং $BC = DA$

(২) $\angle ABC = \angle CDA$,

$\angle BCA = \angle DAC$,

$\angle DCA = \angle CAB$,

∴ সমগ্র $\angle BCD =$ সমগ্র $\angle DAB$। ই. উ. বি.

(৩) $\triangle ABC$এর ক্ষেত্রফল $= \triangle CDA$এর ক্ষেত্রফল।

অনুসিদ্ধান্ত ১। একটি সামন্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে উহার প্রত্যেক কোণই এক সমকোণ হইবে। অর্থাৎ আয়ত-ক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণই এক সমকোণ।

(If one angle of a parallelogram is a right angle, all its angles are right angles).

ABCD সামন্তরিকের $\angle A =$ এক সমকোণ।

AD এবং BC সমান্তরাল এবং AB উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে।

∴ $\angle A + \angle B$ দুই-সমকোণ। কিন্তু $\angle A =$ এক-সমকোণ

∴ $\angle B =$ এক-সমকোণ

$\angle C = \angle A =$ এক-সমকোণ। $\angle D = \angle B =$ এক-সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান হইলে, উহার সকল বাহুই পরস্পর সমান এবং উহার কোণগুলি সমকোণ।

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র, সুতরাং সামন্তরিক।

AB = BC (কল্পনা)। কিন্তু AB = বিপরীত বাহু CD,
এবং BC = বিপরীত বাহু DA।
∴ AB = BC = CD = DA

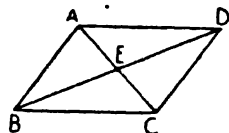
ABCD আয়তক্ষেত্র, সুতরাং ইহার কোণগুলি প্রত্যেকেই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The diagonals of a parallelogram bisect one another.]

ABCD সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় AC, BD পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AE = CE এবং BE = DE

AD এবং BC সমান্তরাল, AC এবং BD উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে।

∴ ∠DAC = একান্তর ∠BCA, এবং ∠ADB = একান্তর ∠CBD।

এখন, AED এবং CEB ত্রিভুজদ্বয়ের

∠EAD = ∠ECB, ∠ADE = ∠CBE,

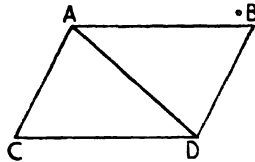
এবং AD = বিপরীত বাহু CB

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AE = CE এবং BE = DE

অর্থাৎ AC এবং BD, পরস্পর E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

উপপাদ্য ২০

দুইটি পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখার এক এক পার্শ্বের দুই সীমাবিন্দু সংযুক্ত করিলে, সংযোগ-রেখাদ্বয় পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল হইবে।

[The straight lines which join the extremities of two equal and parallel straight lines towards the same parts, are themselves equal and parallel.]

AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

AC এবং BD সংযুক্ত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AC এবং BD পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

প্রমাণ। AD সংযুক্ত কর।

AB ও CD সমান্তরাল, এবং AD উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore$ $\angle$CDA = একান্তর $\angle$BAD।

CDA এবং BAD ত্রিভুজদ্বয়ের

AB = CD,

AD সাধারণ বাহু,

এবং $\angle$CDA = $\angle$BAD

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ AC = BD, এবং $\angle$CAD = $\angle$BDA,

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore$ AC এবং BD সমান্তরাল।

সুতরাং AC এবং BD সমান এবং সমান্তরাল। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। যে চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান, তাহা সামন্তরিক হইবে।

২। চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে, উহা সামন্তরিক হইবে। [ক. প্র.

৩। কোন সামন্তরিকের একটি কর্ণদ্বারা একটি কোণ সমদ্বিখণ্ডিত হইলে বিপরীত কোণটিও সমদ্বিখণ্ডিত হইবে, এবং সামন্তরিকটি রম্বস হইবে। [ক. প্র.

৪। কোন চতুর্ভুজের কর্ণদুইটি পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামন্তরিক।

৫। বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [ক. প্র.

৬। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [ক. প্র.

[The diagonals of a rhombus bisect one another at right angles.]

৭। ABCD চতুর্ভুজের AB = AD, CB = CD। প্রমাণ কর যে, AC, BDকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৮। রম্বসের কর্ণদ্বয় উহার কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৯। সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হইলে, উহা একটি আয়তক্ষেত্র। [ক. প্র.

[If the diagonals of a parallelogram are equal, it is a rectangle.]

১০। আয়তক্ষেত্রের এবং বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান!

১১। যে চতুর্ভুজের কর্ণদুইটি পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, উহার বাহুগুলি পরস্পর সমান।

১২। কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সমান এবং উহারা পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

১৩। কোন সামন্তরিকে কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি সরলরেখা উহার বিপরীত বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, রেখাটি ছেদবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৪। ABCD সামন্তরিকের X এবং Y যথাক্রমে AD এবং BCএর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে XY সংযুক্ত করিলে ABXY এবং XYCD উভয়েই সামন্তরিক।

১৫। ABCD সামন্তরিকের AC কর্ণের উপর B এবং Y বিন্দু এরূপ স্থানে আছে যেন AX = CY ; প্রমাণ কর যে BY এবং DB সংযুক্ত করিলে BXDY একটি সামন্তরিক হইবে।

১৬। ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয়ের AB ও DE বাহু দুইটি পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল, আর BC ও EF বাহু দুইটিও পরস্পর সমান এবং

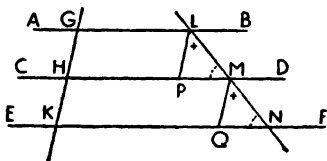
সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, AC ও DF বাহু দুইটিও পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল হইবে। [পা. বি

১৭। ABCD সামন্তরিকের অভ্যন্তরে O একটি বিন্দু। OAEB, OBFC, OCGD এবং ODHA সামন্তরিকগুলি অঙ্কিত হইল; প্রমাণ কর যে EFGH একটি সামন্তরিক। [ক. প্র.

সংজ্ঞা। একটি সরলরেখা দুই বা ততোধিক সরলরেখাগুলিকে ছেদ করিলে উহাকে **ভেদক** (Transversal) বলে।

উপপাদ্য ২১

তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা কোন ভেদককে সমান সমান অংশে বিভক্ত করিলে ঐ সমান্তরাল সরলরেখাগুলি অপর যে-কোন ভেদককেও সমান সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

[If the intercepts made by three or more parallel straight lines on any transversal be equal, then the corresponding intercepts made by them on any other transversal are also equal.]

মনে কর, AB, CD এবং EF সমান্তরাল রেখাগুলি GHK ভেদক হইতে GH এবং HK এই দুই সমান অংশ ছেদ করিয়াছে।

মনে কর, LMN আর একটি ভেদক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, LM = MN।

অঙ্কন। L এবং M হইতে GHK ভেদকের সমান্তরাল করিয়া LP এবং MQ রেখাদ্বয় অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। যেহেতু CD এবং EF পরস্পর সমান্তরাল, এবং LMN উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore \angle LMP =$ অনুরূপ $\angle MNQ$,

আবার LP এবং MQ প্রত্যেকে GHK এর সমান্তরাল, সুতরাং উহারা পরস্পর সমান্তরাল, এবং LMN উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore \angle PLM =$ অনুরূপ $\angle QMN$ ।

এখন, LMP এবং MNQ ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle LMP = \angle MNQ$,

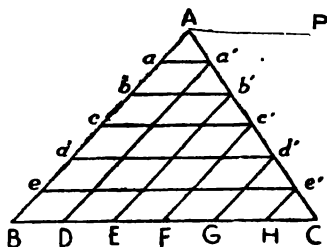
$\angle PLM - \angle QMN$,

এবং $LM = MN$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ১৭

$\therefore LM = MN$ । ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল কতকগুলি সরল রেখা AB বাহুকে সমান সমান অংশে বিভক্ত করিলে উহারা AC বাহুকেও সমান সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

[In a triangle ABC, if the straight lines drawn parallel to the base BC divide AB into equal parts, they will also divide AC into as many equal parts.]

BC ভূমির সমান্তরাল aa', bb', cc'...প্রভৃতি রেখাগুলি AB বাহুকে সমান সমান অংশে বিভক্ত করিল, যেন $Aa = ab = bc$······

প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহারা ACকেও অনুরূপ সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

A বিন্দু দিয়া BC এর সমান্তরাল AP রেখা অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। AP, aa', bb',......BC, সমান্তরাল সরল-রেখাগুলি AB ভেদক হইতে Aa, ab, bc......পরস্পর সমান অংশে ছেদ করিয়াছে।

∴ উহারা AC ভেদক হইতেও অনুরূপ সমান অংশ ছেদ করিবে।

অর্থাৎ $Aa' = a'b' = b'c' = \cdots$

দ্রষ্টব্য। Bc এর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে aa', bb'…প্রভৃতির দৈর্ঘ্যও জানা যায়। মনে কর, $BC = 6''$। a', b'...বিন্দু দিয়া $a'D$, $b'E$…ABএর সমান্তরাল অঙ্কিত কর। AC বাহু সমান ছয় ভাগে বিভক্ত, সুতরাং BC বাহুও সমান ছয় ভাগে বিভক্ত হইল।

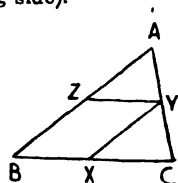
∴ $BD = DE = EF = FG = GH = HC = 1''$।

∴ $aa' = 1''$, $bb' = 2''$, $cc' = 3''$, $dd' = 4''$, $ee' = 5''$।

এবং $aa' = \frac{1}{6}$ BC, $bb' = \frac{2}{6}$ BC, $cc' = \frac{3}{6}$ BC, $dd' = \frac{4}{6}$ BC, $ee' = \frac{5}{6}$ BC।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর এক বাহুর সমান্তরাল করিয়া একটি রেখা অঙ্কিত করিলে, উহা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [ক. প্র.

(The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side, bisects the remaining side).

ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু Z হইতে ZY রেখা BCএর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত হইল এবং ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ZY, ACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

অঙ্কন। Y বিন্দু দিয়া AB এর সমান্তরাল YX অঙ্কিত কর যেন উহা BC কে X বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন BXYZ একটি সামন্তরিক।

∴ XY = বিপরীত বাহু BZ = AZ।

AB এবং XY সমান্তরাল, ∴ ∠ZAY = অনুরূপ ∠XYC

এবং BC ও YZ সমান্তরাল, ∴ ∠AYZ = অনুরূপ ∠YCX।

এখন AYZ এবং YCX ত্রিভুজদ্বয়ের

∠AYZ = ∠YCX,

∠ZAY = ∠XYC,

এবং AZ = XY (প্রমাণিত),

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

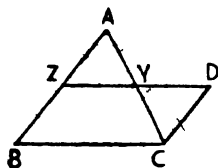
∴ AY = YC।

∴ ZY, ACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

অনুশীলনী

১। ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক সরল রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং উহার অর্ধেক।

(The straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and half of it.) [ক. প্র., ঢাকা বোর্ড।

Z and Y যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু। ZY সংযুক্ত কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ZY, BC এর সমান্তরাল এবং উহার অর্ধেক। ZY, D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন YD = YZ। DC সংযুক্ত কর।

AYZ এবং CYD ত্রিভুজদ্বয়ের

AY = CY,

ZY = DY,

এবং ∠AYZ = বিপ্রতীপ ∠CYD,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ৪

∴ CD = AZ = BZ,

এবং ∠ZAY = ∠DCY,

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

∴ CD ও AZ, অর্থাৎ CD ও BZ সমান্তরাল,

সুতরাং CD ও BZ পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল,

∴ DZ এবং BC পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

কিন্তু ZY, DZ এর অর্ধেক,

∴ ZY, BC এর অর্ধেক এবং সমান্তরাল। ই. উ. বি.

২। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সংযোজক রেখাগুলি ত্রিভুজটিকে চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। এবং উহারা প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজটির এক চতুর্থাংশ এবং উহার সহিত সদৃশ-কোণ। [ক. প্র., ঢাকা বোর্ড

৩। ABCD সামন্তরিকের AD এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q হইলে প্রমাণ কর যে, AC কর্ণকে BP এবং DQ সমান তিন ভাগে বিভক্ত করে। [বো. বি.

৪। কোন ত্রিভুজের দুইবাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক-রেখা শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৫। চতুর্ভুজের বাহুচতুষ্টয়ের মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন চতুর্ভুজটি একটি সামন্তরিক। এবং এই সামন্তরিকের সীমারেখাগুলির সমষ্টি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান। [ক. প্র.

৬। চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [ক. প্র., ঢা. বো.

৭। কোন সরল রেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অপর একটি সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি উহার মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দ্বিগুণ।

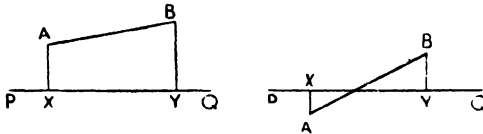
৮। ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা, উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল হইবে, সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক হইবে, এবং কর্ণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৯। ABCD একটি সামন্তরিক এবং EF একটি সরল্ রেখা। প্রমাণ কর যে EF এর উপর A এবং C হইতে অঙ্কিত লম্বের সমষ্টি, B ও D হইতে অঙ্কিত লম্বের সমষ্টির সমান।

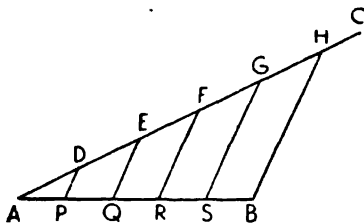
১০। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির অন্তর্গত কোন বিন্দু হইতে বাহুদুইটির উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের **সমষ্টি** ধ্রুবক (constant)—ভূমির কোন প্রান্ত বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

ভূমি বর্ধিত করিয়া বর্ধিত অংশের কোন বিন্দু হইতে বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদুইটির **অন্তর** ধ্রুবক হইবে।

১১। কোন অসীম সরল রেখার উপর দুইটি সমান সমান্তরাল রেখার অভিক্ষেপদ্বয় পরস্পর সমান হইবে। [ঢাকা বোঃ

১২। কোন অসীম সরল রেখার উপর দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার অভিক্ষেপ পরস্পর সমান হইলে সমান্তরাল সরল রেখা দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

সংজ্ঞা। AB সরল রেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে XY অসীম সরল রেখার উপর AP এবং BQ লম্বদ্বয় অঙ্কিত হইলে PQ কে XY এর উপর AB এর **লম্ব অভিক্ষেপ** (Orthogonal Projection) বলে।

সম্পাদ্য ১০

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে যে-কোন সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। [To divide a given straight line into any number of equal parts.]

AB একটি সরল রেখা। মনে কর, ইহাকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABএর সঙ্গে যে-কোন কোণ উৎপন্ন করিয়া AC সরল রেখা টান। এবং ইহা হইতে যে-কোন দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া AD, DE, EF, FG এবং GH এই পাঁচটি সমান অংশ ছেদ কর। BH সংযুক্ত কর।

D, E, F এবং G হইতে BH এর সমান্তরাল করিয়া DP, EQ, FR এবং GS সরল রেখা অঙ্কিত কর।

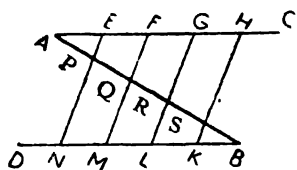
ইহারা AB কে যথাক্রমে P,Q,R এবং S বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ঐ সমস্ত বিন্দুতে AB সরল রেখা সমান সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইবে।

প্রমাণ। যেহেতু DP, EQ, FR এবং GS সমান্তরাল রেখাগুলি AH সরল রেখাকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করিয়াছে, সুতরাং উহারা AB সরল রেখাকেও সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করিবে। [উপ ২১

ই. স. বি.

দ্বিতীয় প্রণালী

A এবং B বিন্দুর মধ্যদিয়া যে-কোন দুইটি সমান্তরাল রেখা AC ও BD টান।

AC হইতে AE, EF, FG, GH সমান সমান চারি অংশ ছেদ কর। এইরূপ BD হইতেও BK, KL, LM ও MN, AE এর সমান ছেদ কর। এখন EN, FM, GL এবং HK সংযুক্ত কর; ইহারা ABকে P, Q, R এবং S বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB সরল রেখা P, Q, R এবং S বিন্দুতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইবে।

প্রমাণ। যেহেতু EF, NM এর সমান ও সমান্তরাল,

∴ EN এবং FM সমান ও সমান্তরাল। [উপ ২০

এইরূপ EN, FM, GL এবং HK পরস্পর সমান্তরাল।

কিন্তু AE = EF = FG = GH,

∴ AP = PQ = QR = RS। [উপ ২১

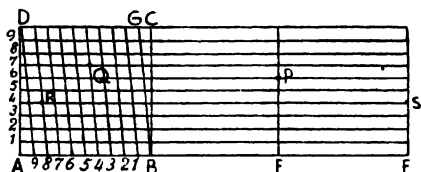
অনুরূপ কারণে BS = SR = RQ = QP।

∴ AB, P, Q, R এবং S বিন্দুতে সমান সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইল। ই. স. বি.

কর্ণ-মাপনী (Diagonal Scale)

সাধারণ মাপনীদ্বারা ইঞ্চ বা সেন্টিমিটার এবং উহাদের দশমাংশ মাপা যায়। কর্ণমাপনী দ্বারা উহাদের শতাংশ নির্ণয় করা যায়।

AF একটি সরল রেখা, ইহার দৈর্ঘ্য ৩″, এবং AB, BE, EF প্রত্যেকে ১″।

AB সমান দশ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে, এবং ABCD একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে। এখন আবার ADকে সমান দশভাগে

বিভক্ত করিয়া ছেদ-বিন্দুদিয়া ABএর সমান্তরাল করিয়া নয়টি রেখা টান। D9 সংযুক্ত কর, এবং 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 দিয়া D9এর সমান্তরাল আটটি সরলরেখা CDকে ছেদ করিল। ইহাই কর্ণমাপনী হইল।

ব্যবহার-প্রণালী। চিত্রে দেখ যে, BCG ত্রিভুজটির CG বাহুর সমান্তরাল নয়টি রেখা অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাদের মধ্যে CGএর সমীপবর্তী প্রথমটি অর্থাৎ B হইতে নবমটি $= \frac{9}{10}$ of CG $= \frac{9}{10}$ of 1B

$= \frac{9}{10}$ of $\frac{1}{10}$ of AB $= \frac{9}{100}$ of AB = ·09 of AB = ·09″

এইরূপ B হইতে অষ্টমটি $= \frac{8}{10}$ of CG $= \frac{8}{10}$ of $\frac{1}{10}$ of AB = ·08″,

সপ্তমটি = ·07″, ষষ্ঠটি = ·06″, পঞ্চমটি = ·05″, চতুর্থটি = ·04″,

তৃতীয়টি = ·03″, দ্বিতীয়টি = ·02″ এবং প্রথমটি = ·01″।

সুতরাং যদি 1·36″ মাপিতে হয়, তাহা হইলে ·3″এর জন্য B3 লইতে হইবে। ·06″ এর জন্য 3 হইতে যে রেখা D9এর সমান্তরাল টানা হইয়াছে, উহাকে AB এর ষষ্ঠ সমান্তরাল Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ডিভাইডারের একটি অগ্রভাগ Q বিন্দুতে এবং অপরটি P বিন্দুতে (অর্থাৎ ষষ্ঠ সমান্তরাল এবং E হইতে AB এর লম্বের ছেদ-বিন্দুতে) স্থাপন করিয়া মাপ নিলেই QP = 1·36″ হইবে।

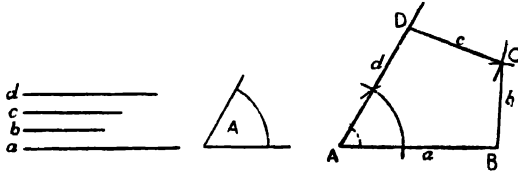
এই প্রকার 2·84″ মাপিতে হইলে, চতুর্থ-সমান্তরাল, 8 হইতে অঙ্কিত রেখাকে R বিন্দুতে এবং F (2″) হইতে অঙ্কিত লম্বকে S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং SR = 2·84″।

চতুর্ভুজ অঙ্কন

চতুর্ভুজের আটটি অংশ—চারিটি বাহু এবং চারিটি কোণ। ইহাদের মধ্যে পাঁচটি অংশ দেওয়া থাকিলেই চতুর্ভুজ অঙ্কিত হইতে পারে। কেবল চারিটি বাহু দেওয়া থাকিলে চতুর্ভুজ অঙ্কিত করা যায় না।

সম্পাদ্য ১১

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a quadrilateral, having given the four sides and one angle.]

একটি চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, এবং d দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। aর সমান করিয়া AB রেখা অঙ্কিত কর। A বিন্দুতে ∠Aর সমান ∠BAD অঙ্কিত কর। dএর সমান করিয়া AD ছেদ কর। B কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, এবং D কেন্দ্র করিয়া c ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

BC এবং DC সংযুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ। কারণ, অঙ্কনানুযায়ী,

AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, এবং ∠BAD = ∠A।

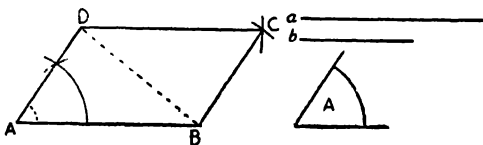
ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। আমরা জানি যে সামন্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান, সুতরাং সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া থাকিলেই সামন্তরিক অঙ্কিত করা যায়।

সম্পাদ্য ১২

কোন সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূ‌ত কোণ দেওয়া আছে, সামন্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To describe a parallelogram, having given two adjacent sides and the included angle]

একটি সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b এবং উহাদের অন্তর্ভূ‌ত ∠A দেওয়া আছে।

সামন্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। aর সমান করিয়া AB সরল রেখা অঙ্কিত কর। A বিন্দুতে ∠A এর সমান করিয়া ∠BAD অঙ্কিত কর এবং bএর সমান AD ছেদ কর। B বিন্দু কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর এবং D কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর। উহারা C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC এবং DC সংযুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট সামন্তরিক।

BD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। BAD এবং DCB ত্রিভুজদ্বয়ের

AB = a = CD,

DA = b = BC,

এবং BD সাধারণ বাহু।

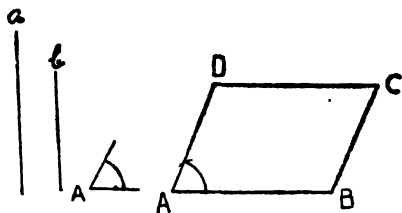
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠ABD = একান্তর ∠BDC, এবং ∠BDA = একান্তর ∠DBC,

∴ AB ও CD সমান্তরাল, এবং AD ও BC সমান্তরাল।

সুতরাং ABCD সামন্তরিক। ই. স. বি.

বিকল্প অঙ্কন

aর সমান AB রেখা টান, এবং A বিন্দুতে ∠A এর সমান করিয়া ∠BAD অঙ্কিত কর। b এর সমান AD ছেদ কর। B এবং D বিন্দু দিয়া BC এবং DC যথাক্রমে AD এবং ABএর সমান্তরাল অঙ্কিত কর।

ABCD অভীষ্ট সামন্তরিক।

কারণ, অঙ্কন দ্বারা ইহা সামন্তরিক,

এবং ইহার বাহু CD = বিপরীত বাহু AB = a

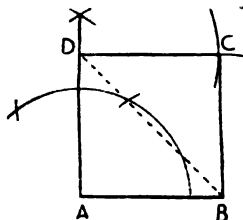
BC = ,, ,, AD = b

এবং ∠BAD = ∠A। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। বর্গক্ষেত্র একটি সামন্তরিক যাহার বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলি সমকোণ। সুতরাং একটি বাহু দেওয়া থাকিলেই বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইতে পারে।

সম্পাদ্য ১৩

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To describe a square on a given straight line.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা। ABএর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুতে ABএর উপর একটি লম্ব টান, এবং উহা হইতে AB এর সমান AD ছেদ কর।

B ও D কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর।

উহারা C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC এবং DC সংযুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ। BD সংযুক্ত কর।

AB = CD, DA = BC, এবং CB সাধারণ বাহু,

∴ ABD এবং CDB ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ ∠ABD = একান্তর ∠CDB,

এবং ∠CBD = একান্তর ∠ADB,

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

∴ ABCD সামন্তরিক।

ইহার ∠BAD = সমকোণ

এবং AB = সন্নিহিত বাহু AD,

∴ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। আয়তক্ষেত্রের কোণগুলি সমকোণ, সুতরাং দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকিলেই আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

অনুশীলনী

১। 3″ দীর্ঘ একটি সরল রেখাকে সমান ছয় ভাগে বিভক্ত কর।

২। AB কে C বিন্দুতে এরূপ ভাবে বিভক্ত কর যেন AC = $\frac{3}{5}$AB হয়। (ABকে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিয়া উহা হইতে তিন ভাগ লইতে হইবে)।

৩। ABকে C বিন্দুতে এরূপ ভাবে বিভক্ত কর যেন 3 AC = 5 BC হয়।

৪। ত্রিভুজের পরিসীমা এবং দুইটি কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(সঙ্কেত—DE পরিসীমা হইলে এবং B ও C নির্দিষ্ট কোণ হইলে DA এবং EA এইরূপ দুইটি রেখা টান যেন $\angle EDA = \frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle DEA = \frac{1}{2}\angle C$; আবার AB ও AC দুইটি রেখা টান যেন $\angle DAB = \angle EDA$ এবং $\angle EAC = \angle DEA$; ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ)।

৫। ABCD চতুর্ভুজের $AB = 5''$, $BC = 2''$, $CD = 4''$, $DA = 3''$, এবং $\angle A = 60°$; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

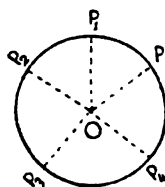
৬। একটি সামন্তরিকের দুইটি বাহু $1{\cdot}5''$, $2{\cdot}5''$, এবং উহার একটি কর্ণ $3''$; সামন্তরিকটি অঙ্কিত কর।

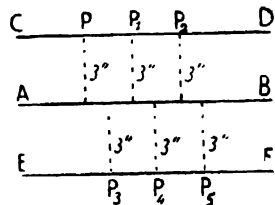
৭। একটি আয়ত-ক্ষেত্রের একটি বাহু $1''$ এবং উহার কর্ণ $3''$; আয়ত ক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

৮। একটি বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $2''$, বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর। উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

সঞ্চার-পথ (Loci)

কোন বিন্দু নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে চলিলে উহাদ্বারা যে ভ্রমণপথ বা রেখা উৎপন্ন হয়, তাহাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চার-পথ** (Locus) বলে।

উদাহরণ ১। মনে করে একটি বিন্দু P এরূপ ভাবে একটি সমতলের উপর চলিতেছে যেন উহা একটি **স্থিরবিন্দু** O হইতে সর্বদাই ১" দূরে থাকে। তাহা হইলে O কে কেন্দ্র করিয়া ১" ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে এই বৃত্তের পরিধিই Pএর সঞ্চারপথ। কারণ, O হইতে এই পরিধির প্রত্যেক বিন্দুর ($P_1, P_2 \cdots$) দূরত্ব ১" এবং পরিধির ভিতরের কিংবা বাহিরের কোন বিন্দুর দূরত্বই ১" নহে।

The locus of a point which moves that it is always at a given distance from a *fixed point* is a circle whose centre is the fixed point and whose radius is the given distance.

উদাহরণ ২। মনে কর, P বিন্দুটি এই নিয়মে ভ্রমণ করিতেছে যেন উহা সর্বদাই AB **সরল রেখা** হইতে ¾" দূরে থাকে। AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে ¾" দূরে AB এর সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরল রেখা CD ও EF অঙ্কিত করিলে, P বিন্দু এই সরল রেখাদ্বয়ের কোন একটির উপর থাকিবেই। সুতরাং এই সরল রেখা দুইটিই P বিন্দুর সঞ্চার-পথ। কারণ, AB হইতে CD এবং EF এর বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব ¾" হইতে বেশী বা কম হইবে, সমান হইতে পারে না; কিন্তু উহাদের অন্তর্গত প্রত্যেক বিন্দুই AB হইতে ¾" দূরে অবস্থিত।

The locus of a point which moves that it is always at a given distance from a fixed straight line is a pair of straight lines drawn parallel to the given straight line, one on each side of it and at the given distance from it.

অতএব এই উভয় স্থলে দেখা যাইতেছে যে, কোন রেখা একটি গতিশীল বিন্দুর সঞ্চার-পথ কিনা প্রমাণ করিতে হইলে, দেখাইতে হইবে যে,

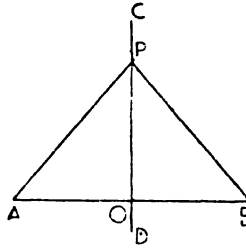
(১) ঐ রেখার অন্তর্গত প্রত্যেক বিন্দু নির্দিষ্ট নিয়ম প্রতিপালন করে, এবং (২) ঐ রেখার বাহিরে কোন বিন্দুই নির্দিষ্ট নিয়ম প্রতিপালন করে না।

কোন বিন্দু নির্দিষ্ট নিয়মে চলিলে, উহার ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানগুলি বিন্দুদ্বারা চিহ্নিত করিয়া পর পর বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া রেখা উৎপন্ন করার নাম **সঞ্চার-পথের নক্সা অঙ্কন** (Plotting the locus)।

দ্রষ্টব্য। প্রথম উদাহরণে সঞ্চার-পথের সংখ্যা **এক**। কিন্তু দ্বিতীয় উদাহরণে সঞ্চার-পথের সংখ্যা **দুই**। সুতরাং স্থলবিশেষে সঞ্চার-পথের সংখ্যা এক বা একাধিক হইতে পারে।

সম্পাদ্য ১৪

একটি বিন্দু এরূপ ভাবে ভ্রমণ করে যে উহা অপর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদাই সমদূরবর্তী থাকে, উহার সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the locus of a point which moves so that its distances from two fixed points are always equal.]

মনে কর, P বিন্দুটি এরূপভাবে ভ্রমণ করিতেছে যে উহা A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদাই সমান দূরে থাকে। অর্থাৎ সর্বাবস্থায়ই PA = PB।

P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AB সংযুক্ত কর এবং ABকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর ; ∴ OA = OB।

সুতরাং O, P বিন্দুর একটি অবস্থান হইবেই।

মনে কর, P বিন্দু আর একটি অবস্থান, যেন PA = PB।

PA, PB, PO সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। AOP এবং BOP ত্রিভুজদ্বয়ের

OA = OB,

OP সাধারণ বাহু,

এবং PA = PB,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ ∠AOP = BOP,

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ,

∴ PO, O বিন্দুতে ABএর উপর লম্ব।

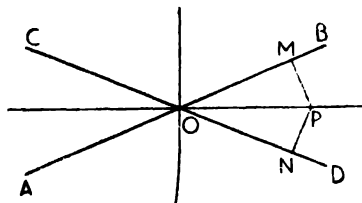
এখন A এবং B নির্দিষ্ট বিন্দু বলিয়া AB নির্দিষ্ট সরল রেখা, এবং ইহার মধ্যবিন্দু O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

আবার O বিন্দু দিয়া ABএর উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত হইতে পারে, সুতরাং OP একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা। OP উভয় দিকে বর্ধিত হইলে CD, ABএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এবং CDই অভীষ্ট সঞ্চার-পথ। কারণ, CDএর উপর প্রত্যেক বিন্দুই A এবং B হইতে সমদূরবর্তী এবং ইহাও প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, CD এর বাহিরে কোন বিন্দুই A এবং B হইতে সমদূরবর্তী হইতে পারে না।

সুতরাং, CDই Pএর সঞ্চার-পথ। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ১৫

পরস্পর ছেদকারী দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী থাকে এইরূপ একটি বিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

[To find the locus of a point which moves so that it is always equidistant from two given straight lines.]

মনে কর, দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা AB এবং CD O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, এবং P বিন্দুটি AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী থাকিয়া ভ্রমণ করিতেছে। P বিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর, P, ঐ বিন্দুটির একটি অবস্থান; অর্থাৎ যদি PM এবং PN AB এবং CD এর উপর যথাক্রমে লম্ব হয়, তবে PM = PN।

OP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। POM এবং PON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

PMO এবং PNO সমকোণ,

অতিভুজ OP সাধারণ বাহু,

এবং PM = PN.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ১৮

∴ $\angle POM = \angle PON$।

অর্থাৎ OP, $\angle BOD$এর সমদ্বিখণ্ডক।

AB এবং CD নির্দিষ্ট সরল রেখা বলিয়া

উহাদের দ্বারা উৎপন্ন BOD প্রভৃতি কোণগুলিও নির্দিষ্ট এবং ঐ কোণগুলির সম-দ্বিখণ্ডকগুলিও নির্দিষ্ট।

সুতরাং P বিন্দু $\angle BOD$এর অন্তঃস্থ হইলে ইহা ঐ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে।

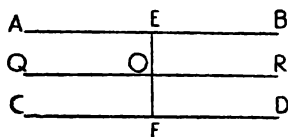
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, P যদি $\angle BOC$এর অন্তঃস্থ হয়, তবে উহা ঐ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে।

অতএব AB এবং CD রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণ-চতুষ্টয়ের সমদ্বিখণ্ডকগুলিই P বিন্দুর সঞ্চারপথ। ই. সি. বি.

দ্রষ্টব্য। $\angle BOD$ ও উহার বিপ্রতীপ কোণ AOCএর সমদ্বিখণ্ডক একই সরলরেখা। এইরূপ $\angle AOD$ ও উহার বিপ্রতীপ কোণ BOCএর সমদ্বিখণ্ডক একই সরলরেখা।

যদি AB এবং CD ছেদ না করে অর্থাৎ উহারা যদি সমান্তরাল হয়, এবং P বিন্দু উহাদের সমদূরবর্তী থাকিয়া ভ্রমণ করে, তাহা হইলে উহার সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AB ও CDএর উপর EF একটি লম্ব অঙ্কিত কর এবং EFকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O দিয়া AB ও CDএর সমান্তরাল করিয়া QR সরল রেখা অঙ্কিত কর। QR, Pএর সঞ্চারপথ।

A E B
Q O R
C D
F

কারণ AB এবং CD সমান্তরাল বলিয়া ABএর প্রত্যেক বিন্দু CD হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং EF নির্দিষ্ট। অতএব ইহার মধ্যবিন্দু O নির্দিষ্ট। তাহা হইলে QRও নির্দিষ্ট এবং ইহার প্রত্যেক বিন্দু AB অথবা CD হইতে সমান দূরে ($=\frac{1}{2}$ EF) অবস্থিত। অতএব QR, Pএর সঞ্চারপথ।

অনুশীলনী

১। কোন নিদিষ্ট ভূমির উপর অঙ্কিত সমদ্বিবাহু ত্রিভুজসমূহের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা দুইটি নিদিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী এবং আর একটি নিদিষ্ট বিন্দু হইতে 2″ দূরে অবস্থিত। ইহা কখন অসম্ভব হইবে?

৩। তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর। [ক. প্র.

৪। কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

৫। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে, উহার শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও একটি বাহু দেওয়া আছে, উহার শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ দেওয়া আছে, সমকোণী শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(সঙ্কেত—সমকোণী শীর্ষ এবং অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা

অতিভুজের অর্ধেক। অতএব অতিভুজের মধ্যবিন্দু কেন্দ্র করিয়া অতিভুজের অর্ধ-ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।)

৮। একটি ত্রিভুজের ভূমি এবং উচ্চতা দেওয়া আছে, এবং উহার শীর্ষ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি দেওয়া আছে এবং উহার শীর্ষ একটি নির্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা অপর দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে সমদূরবর্তী।

১১। একটি বিন্দু দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে সমদূরবর্তী এবং অপর একটি বিন্দু হইতে ২" দূরে অবস্থিত, উহার অবস্থান নির্ণয় কর। এইরূপ কয়টি বিন্দু পাওয়া যাইতে পারে? কখন অঙ্কন অসম্ভব হইবে?

১২। A একটী নির্দিষ্ট বিন্দু, BC একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং D একটি নির্দিষ্ট কোণ। A হইতে BC পর্যন্ত এমন একটি সরল রেখা AP টান যেন $\angle APC = \angle D$।

১৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা এবং ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে শীর্ষের দূরত্ব দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

১৪। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা এবং একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

সমবিন্দু সরলরেখা

তিন বা ততোধিক সরলরেখা পরস্পর এক বিন্দুতে ছেদ করিলে উহাদিগকে **সমবিন্দু** বা **একবিন্দুগামী সরলরেখা** (Concurrent Straight Lines) বলে, এবং ছেদবিন্দুকে **সম্পাতবিন্দু** (point of concurrence) বলে।

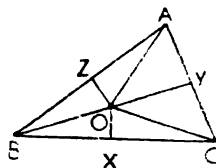
নিম্নে **সমবিন্দু সরলরেখা** সম্বন্ধে কয়েকটি **অত্যাবশ্যক** প্রতিজ্ঞা দেওয়া হইল।

১। যে-কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু হইবে।

(The perpendiculars drawn from the middle points of the sides of a triangle are concurrent).

মনে কর, ABC ত্রিভুজের X, Y এবং Z যথাক্রমে উহার বাহু BC, CA এবং ABএর মধ্যবিন্দু।

Y এবং Z হইতে YO এবং ZO যথাক্রমে AC এবং ABএর লম্ব টান। উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। OX সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OX, BCএর উপর লম্ব। OA, OB এবং OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। YO, AC বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

∴ YO, C এবং A হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ।

∴ OC = OA.

আবার, ZO, AB বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক,

∴ ZO, A এবং B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ।

∴ OA = OB.

∴ OB = OC.

এখন BXO এবং CXO ত্রিভুজদ্বয়ের

BX = CX,

XO সাধারণ বাহু,

এবং OB = OC,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ৭

∴ $\angle BXO = \angle CXO$

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ, সুতরাং প্রত্যেকে সমকোণ।

∴ XO, BCএর উপর লম্ব।

অর্থাৎ লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। ই. উ. বি.

২। কোন ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাগুলি সমবিন্দু হইবে।

[The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ABC এবং BCA কোণদ্বয়কে যথাক্রমে BO CO সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া O বিন্দুতে মিলিত হইল। OA সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OA, ∠CAB কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

O হইতে BC, CA এবং ABএর উপর যথাক্রমে OD, OE এবং OF লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। BO, ∠ABC এর সমদ্বিখণ্ডক,

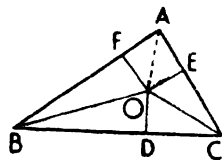
∴ BO, AB এবং BC বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ।

∴ OF = OD।

এইরূপ ∠BCA এর সমদ্বিখণ্ডক বলিয়া CO, BC এবং CA বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ।

∴ OD = OE,

∴ OE = OF।

এখন, EAO এবং FAO ত্রিভুজদ্বয়ের

∠AEO এবং ∠AFO সমকোণ,

অতিভুজ AO সাধারণ বাহু,

এবং, OE = OF,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ১৮

সুতরাং ∠EAO = ∠FAO,

অর্থাৎ AO, ∠BAC এর সমদ্বিখণ্ডক।

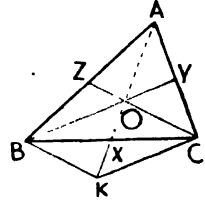
সুতরাং কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকগুলি O বিন্দুতে সমবিন্দু হইল। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। O বিন্দুকে ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (In-centre) বলে।

৩। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

[The medians of a triangle are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের BY এবং CZ মধ্যমাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল. AO সংযুক্ত কর। AO বর্ধিত করায় BC কে X বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX ত্রিভুজটির অবশিষ্ট মধ্যমা, অর্থাৎ AX, BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

C বিন্দু দিয়া BO এর সমান্তরাল করিয়া CK রেখা অঙ্কিত কর, যেন উহা বর্ধিত AX কে K বিন্দুতে ছেদ করে। BK সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ACK ত্রিভুজের Y, AC বাহুর মধ্যবিন্দু এবং YO, CK এর সমান্তরাল।

$\therefore$ O, AKএর মধ্যবিন্দু।

আবার Z এবং O যথাক্রমে AB এবং AK এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ ZO অর্থাৎ OC, BKএর সমান্তরাল।

$\therefore$ BOCK একটি সামন্তরিক।

সুতরাং ইহার কর্ণদ্বয় BC এবং OK, পরস্পরকে X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ AX অবশিষ্ট মধ্যমা, এবং মধ্যমাত্রয় পরস্পর O বিন্দুকে ছেদ করায় উহারা সমবিন্দু। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সম্পাত-বিন্দুকে **ভরকেন্দ্র** (Centroid) বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় উহার ভরকেন্দ্রে সমত্রিখণ্ডিত হয়। এবং প্রত্যেকের কোণের দিকের অংশ বৃহত্তর (অর্থাৎ উহার দুই-তৃতীয়াংশ)।

[The medians of a triangle are trisected at the point of intersection, the greater segments being towards the angular points.)

উপরি-উক্ত উপপাদ্যে প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$AO = OK = 2OX$,

$\therefore AX = AO + OX = 3OX$,

সুতরাং AX, O বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইয়াছে।

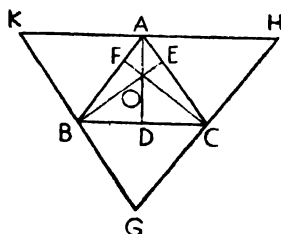
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, BY এবং CZও O বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইয়াছে ; এবং $BO = 2OY$, ও $CO = 2OZ$।

৪। কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

[The perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B এবং C হইতে বিপরীত বাহু BC, CA এবং AB এর উপর যথাক্রমে AD, BE এবং CF লম্ব অঙ্কিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD, BE এবং CF সমবিন্দু হইবে।

C, A এবং B বিন্দু দিয়া AB, BC এবং CA এর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে GH, HK এবং KG রেখা অঙ্কিত কর।

উহারা GHK ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ। অঙ্কনানুযায়ী ACBK একটি সামন্তরিক,

$\therefore AK =$ বিপরীত বাহু BC, [উপ ২০

আবার, ABCH একটি সামন্তরিক,

$\therefore BC = AH$,

$\therefore AK = AH$।

সুতরাং A, HK এর মধ্যবিন্দু।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, B এবং C যথাক্রমে KG এবং GHএর মধ্যবিন্দু।

এখন BC এবং HK সমান্তরাল এবং AD উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে।

$\therefore \angle KAD = \angle ADC =$ এক সমকোণ।

সুতরাং AD, GHK ত্রিভুজের HK বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে BE এবং CF যথাক্রমে KG এবং GH বাহুদ্বয়ের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

সুতরাং AD, BE এবং CF সমবিন্দু। (১)

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদ-বিন্দুকে **লম্ববিন্দু** (Orthocentre) বলে।

অনুশীলনী

১। একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুগুলি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [বো. বি.

২। ত্রিভুজের দুই বাহু এবং তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩। ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [বো. বি.

৫। সমবাহু ত্রিভুজের কোণের পরিমাণ এবং বাহুর সমতা অবলম্বনে একটি সরল রেখাকে সমত্রিখণ্ডিত কর।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৭। কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ এবং অন্য দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [ক. প্র.

৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অন্য দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ACএর উপর এমন একটি বিন্দু P নির্দেশ কর, যেন P হইতে AB এর উপর লম্ব, PCএর সমান সমান হয়। [ক. প্র.

(সঙ্কেত—$\angle$Cএর সমদ্বিখণ্ডক রেখা ABকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল, BC এর সমান্তরাল QP অঙ্কিত কর, যেন উহা AC কে P বিন্দুতে ছেদ করে। P অভীষ্ট বিন্দু।)

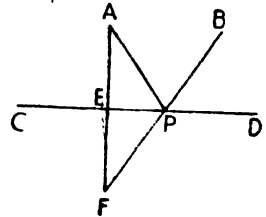
১১। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর যেন উহা পরস্পর ছেদকারী দুইটি সরল রেখার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। [ক. প্র.

১২। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার একই পার্শ্বস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন দুইটি সরল রেখা অঙ্কিত কর যেন উহারা নির্দিষ্ট সরল রেখাটির উপর মিলিত হইয়া উহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। [ক. প্র.

(From two given points on the same side of a given straight line draw two lines which will meet on the given straight line and make equal angles with it.)

মনে কর, CD নির্দিষ্ট সরল রেখা, এবং A ও B উহার একই পার্শ্বস্থ নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু। A এবং B হইতে এমন দুইটি সরল রেখা অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহারা CD সরল রেখার উপর মিলিত হইয়া উহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। CDএর উপর AE লম্ব টান এবং উহা F পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন EF = AE।

A B E C P D F

BF সংযুক্ত কর, যেন উহা CD কে P বিন্দুতে ছেদ করে। AP সংযুক্ত কর। AP এবং BP অভীষ্ট রেখাদ্বয়।

প্রমাণ। AEP এবং FEP ত্রিভুজদ্বয়ের,

AF = FE, EP সাধারণ বাহু, এবং ∠AEP = ∠FEP (সমকোণ),

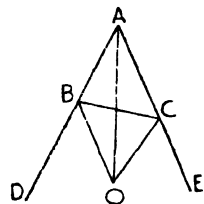
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং ∠APE = ∠FPE

= বিপ্রতীপ ∠BPD,

অতএব AP এবং BP অভীষ্ট সরল রেখা।

১৩। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু বর্ধিত করিলে বহিঃকোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় এবং তৃতীয় কোণের সমদ্বিখণ্ডক একবিন্দুগামী।

(If two sides of a triangle are produced the bisectors of the exterior angles and the bisector of the third angle are concurrent.)

ABC ত্রিভুজদ্বয়ের AB এবং AC বাহু D এবং E পর্যন্ত বর্ধিত হইল। BO এবং CO, যথাক্রমে ∠DBC এবং ∠ECBএর সমদ্বিখণ্ডক। AO সংযুক্ত কর। AO, ∠BACএর সমদ্বিখণ্ডক হইবে। BO, ∠DBCএর সমদ্বিখণ্ডক।

∴ BOএর উপর প্রত্যেক বিন্দু, AB এবং BC হইতে সমদূরবর্তী।

এইরূপ COএর উপর প্রত্যেক বিন্দু AC এবং BC হইতে সমদূরবর্তী।

∴ উহাদের সাধারণ বিন্দু O, AB, BC এবং AC হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং O, AB এবং ACএর সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত। ∴ AO, ∠BAC এর সমদ্বিখণ্ডক।

এইরূপ স্থলে O বিন্দুকে ABC ত্রিভুজের একটি **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) বলা হয়।

১৪। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র, একটি কৌণিক বিন্দু এবং উহার বিপরীত দিকে অবস্থিত বহিঃকেন্দ্র একই সরল রেখার অন্তর্গত।

ঋজু-রেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বা কালি

সংজ্ঞা

১। কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের পরিমাণকে উহার **ক্ষেত্রফল বা কালি** (Area) বলা হয়।

২। যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চ, তাহার ক্ষেত্রফলের পরিমাণ এক বর্গ ইঞ্চ (one square inch)।

এইরূপ বর্গক্ষেত্রের বাহু এক সেন্টিমিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল এক বর্গ সেন্টিমিটার (square centimetre), বাহু এক ফুট হইলে ক্ষেত্রফল এক বর্গফুট ইত্যাদি।

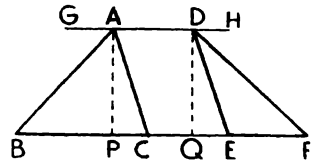
যে বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য একক তাহার ক্ষেত্রফলকে বর্গ-একক (square unit) বলা যাইতে পারে। একক ইঞ্চ, ফুট বা গজ হইলে বর্গ-একক যথাক্রমে বর্গইঞ্চ (square inch), বর্গফুট (square foot) বা বর্গগজ (square yard) হইবে।

৩। কোন সামন্তরিক যে-কোন বাহুর উপর দণ্ডায়মান হইলে, ঐ বাহুকে উহার **ভূমি** (Base) বলা যায়। এবং বিপরীত বাহুর যে-কোন বিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, ঐ লম্বকে সামন্তরিকের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (Altitude or Height) বলে। ABCD সামন্তরিকের BC বাহুকে ভূমি ধরিলে এবং বিপরীত বাহু AD এর যে-কোন বিন্দু P হইতে BC এর উপর PQ লম্ব টানিলে, PQ, ABCDএর উচ্চতা হইবে।

৪। কোন ত্রিভুজের যে-কোন বাহুকে ভূমি ধরিয়া তাহার বিপরীত শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, ঐ লম্বকে ত্রিভুজটির **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (Altitude or Height) বলে।

দ্রষ্টব্য। সামন্তরিকের দুইটি উচ্চতা থাকিতে পারে। কিন্তু ত্রিভুজের তিনটি। কারণ সামন্তরিকের প্রত্যেক জোড়া বিপরীত বাহুর দূরত্বকেই উহার উচ্চতা বলা যাইতে পারে। কিন্তু ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের প্রত্যেকটি হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব উহার উচ্চতা হইতে পারে।

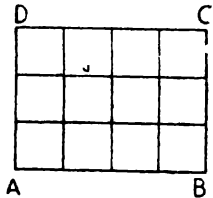
দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত যাবতীয় সামন্তরিক কিংবা ত্রিভুজের উচ্চতা পরস্পর সমান।

ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয় GH এবং BF সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। উহাদের উচ্চতা AP = DQ ; কারণ APQD আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহু সমান।

বিপরীতক্রমে দুইটি সামন্তরিক বা দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হইলে উহারা দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত হইতে পারে।

৫। আয়তক্ষেত্রের বৃহত্তর বাহুকে উহার দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে উহার প্রস্থ বা বিস্তার বলে।

ABCD আয়তক্ষেত্রের বৃহত্তর বাহু AB বা CD = 4″ ; এবং ক্ষুদ্রতর বাহু BC বা AD = 3″, ইহার কালি কত ?

AB এবং AD কে যথাক্রমে সমান চারি এবং তিন ভাগে বিভক্ত কর, তাহা হইলে প্রত্যেক ভাগ 1″ হইবে।

এখন প্রত্যেক বাহুর ছেদবিন্দু দিয়া, অপর বাহুর সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। ইহাতে আয়তক্ষেত্রটি কয়েকটি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইল, উহাদের প্রত্যেকের বাহু 1″ এর সমান। সুতরাং উহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল এক বর্গইঞ্চ হইবে। এখন দৈর্ঘ্যের এক সারিতে চারিটি বর্গক্ষেত্র আছে এবং এইরূপ তিনটি সারি আছে। সুতরাং মোট $4 \times 3 = 12$ বর্গক্ষেত্র আছে।

∴ আয়তক্ষেত্রটির কালি বা ক্ষেত্রফল = 12 বর্গইঞ্চ।

অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য (কারণ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান)

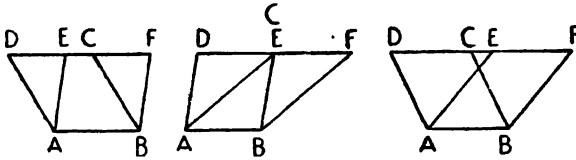
= (দৈর্ঘ্য)^{২} ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। যে সমস্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান তাহাদের কালিও সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যে সমস্ত আয়তক্ষেত্রের কালি ও দৈর্ঘ্য সমান, উহাদের প্রস্থও সমান। এবং যাহাদের কালি ও প্রস্থ সমান, উহাদের দৈর্ঘ্যও সমান।

উপপাদ্য ২২

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামন্তরিকসমূহের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান হইবে।

[Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.]

মনে কর, ABCD এবং ABFE দুইটি সামন্তরিক একই ভূমি ABএর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় AB এবং DF এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, সামন্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

প্রমাণ। ADE এবং BCF ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle ADE =$ অনুরূপ $\angle BCF$,

$\angle AED =$ অনুরূপ $\angle BFC$,

এবং $AD =$ বিপরীত বাহু BC,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ ১৭

সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান।

এখন সমগ্র ABFD ক্ষেত্র হইতে $\triangle BCF$ বাদ দিলে সামন্তরিক ABCD অবশিষ্ট থাকে।

আবার, ABFD হইতে△ADE বাদ দিলে সামন্তরিক ABFE অবশিষ্ট থাকে।

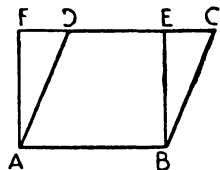
সুতরাং এই অবশিষ্টদ্বয় পরস্পর সমান।

অর্থাৎ ABCD এবং ABFE সামন্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

ই. উ. বি.

সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল

মনে কর, AB ভূমির উপর অবস্থিত ABCD একটি সামন্তরিক। A এবং B বিন্দু হইতে CDএর উপর যথাক্রমে AF এবং BE লম্ব টান (আবশ্যকমত CD বর্ধিত করিয়া লইতে হইবে)।

এখন ABEF একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার ক্ষেত্রফল সামন্তরিক ABCDএর ক্ষেত্রফলের সমান, কারণ উহারা একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

কিন্তু আয়তক্ষেত্র ABEF = AB × BE,

∴ সামন্তরিক ABCD = AB × BE = ভূমি × উচ্চতা।

অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামন্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

(Parallelograms on equal bases and between the same parallels are equal in area.)

ABCD এবং EFGH সামন্তরিকদ্বয় সমান সমান ভূমি AB ও EF এর উপর এবং AF ও DG সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

∴ উহারা দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত,

∴ উহাদের উচ্চতা সমান।

ABCD এর ক্ষেত্রফল = AB × উচ্চতা,

EFGH এর ক্ষেত্রফল = EF × উচ্চতা,

কিন্তু AB = EF, এবং উভয়ের উচ্চতাও সমান,

∴ সামন্তরিক ABCD = সামন্তরিক EFGH।

অনুশীলনী

১। সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। যাহার ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 3″ এবং 2″; 4 cm এবং 3 cm; 2·5″ এবং 1·5″; 5·25 cm এবং 3·75 cm.

২। একটি সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল 600 বর্গ ইঞ্চ। উহার উচ্চতা 20 ইঞ্চ হইলে উহার ভূমির দৈর্ঘ্য কত?

৩। একটি সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল 756 বর্গ ইঞ্চ। উহার ভূমি 3′ হইলে উচ্চতা কত হইবে?

৪। একটি রম্বসের ক্ষেত্রফল 21·6 বর্গইঞ্চ এবং উহার বাহু 5·4″, উহার উচ্চতা নির্ণয় করিয়া রম্বসটি অঙ্কিত কর।

৫। একটি সামন্তরিকের একটি বাহুর উপর, উহার সমান করিয়া একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

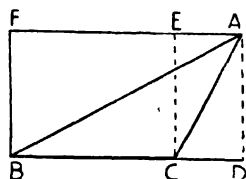
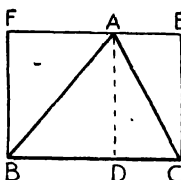
৬। একটি সামন্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 3″, 4″ এবং 10 বর্গ ইঞ্চ হইলে, উহার উচ্চতা কত? সামন্তরিকটিও অঙ্কিত কর।

৭। কোন সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল 5·6 বর্গ ইঞ্চ হইলে এবং ভূমি ও কর্ণ যথাক্রমে 3·5″ ও 2″ হইলে, উহার উচ্চতা কত? সামন্তরিকটি অঙ্কিত কর।

উপপাদ্য ২৩

কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমির (অথবা সমান ভূমির) উপর অঙ্কিত সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

[The area of a triangle is equal to half the area of a rectangle on the same (or equal) base and having the same altitude.]

মনে কর, △ABC ও আয়তক্ষেত্র BCEF একই ভূমি BCএর উপর অবস্থিত, এবং উহাদের উচ্চতা সমান। A হইতে BC এর উপর AD লম্ব টান। অতএব AD উভয়ের উচ্চতা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, △ABC এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র BCEFএর ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

প্রমাণ। AD, BCএর উপর লম্ব বলিয়া DF এবং DE উভয়েই আয়তক্ষেত্র। DF এবং DE, কর্ণ AB এবং AC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

∴ △ADB = $\frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র BDAF……(1)

এবং △ADC = $\frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র CDAE……(2)

১ম চিত্রে (1) এবং (2) এর যোগফল এবং ২য় চিত্রে উহাদের বিয়োগ ফল লইলে, উভয় ক্ষেত্রে

△ABC = $\frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র BCEF

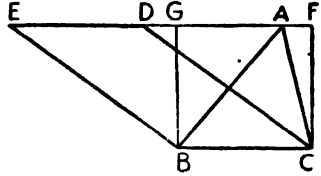
= $\frac{1}{2}$ BC × AD

= $\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা ($\frac{1}{2}$ base × altitude)।

দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, উহার ভূমি ও উচ্চতার গুণফলের অর্ধেক।

অনুসিদ্ধান্ত ১। একটি ত্রিভুজ এবং একটি সামন্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

(A triangle is half any parallelogram on the same base and between the same parallels.)

মনে কর, $\triangle ABC$, সামন্তরিক BCDE এবং আয়তক্ষেত্র BCFG একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় BC ও EF এর মধ্যে অবস্থিত আছে।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BCFG = সামন্তরিক BCDE, উভয়ের একই ভূমি এবং একই উচ্চতা,

কিন্তু $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times$ আয়তক্ষেত্র BCFG

$= \frac{1}{2} \times$ সামন্তরিক BCDE।

অনুসিদ্ধান্ত ২। সমান সমান ভূমি ও সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

মনে কর, ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি BC = EF, এবং উচ্চতা AG = DH,

প্রমাণ করিতে হইবে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AG = \frac{1}{2} EF \times DH = \triangle DEF$।

অনুশীলনী

১। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যাহার

ভূমি 16′ এবং উচ্চতা 12′ ; ভূমি 4·2″, উচ্চতা 2′8″ ;

ভূমি 100 মিটার, উচ্চতা 75 মিটার।

২। একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে 5″, 6″ এবং 5″, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিয়া উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

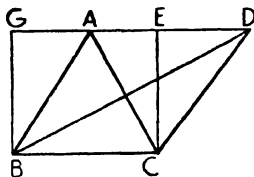
৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে 3cm. এবং 4cm. হইলে, উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

৪। একটি ত্রিভুজের—(১) ক্ষেত্রফল 48 বর্গ ইঞ্চি, ভূমি 8″, উচ্চতা কত ?

(২) ক্ষেত্রফল 88 বর্গ ফুট, উচ্চতা 4′, ভূমি কত ?

উপপাদ্য ২৪

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.]

মনে কর, ABC এবং DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BCএর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় BC ও ADএর মধ্যে অবস্থিত আছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

প্রমাণ। মনে কর, BCEG আয়তক্ষেত্রটি BC ভূমির উপর এবং BC ও AD সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times$ আয়তক্ষেত্র BCEG
এবং $\triangle DBC = \frac{1}{2} \times$ আয়তক্ষেত্র BCEG } [উপ ২৩

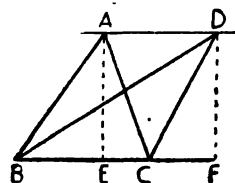
$\therefore$ $\triangle ABC = \triangle DBC$. ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখা-দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। (উপ ২৩এর ২য় অনুসিদ্ধান্ত।)

উপপাদ্য ২৫

একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

[Two equal triangles standing on the same base and on the same side of it are between the same parallels.]

মনে কর, ABC এবং DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BCএর উপর উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত আছে, এবং উহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। AD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD এবং BC পরস্পর সমান্তরাল।

A এবং D হইতে BCএর উপর AE এবং DF লম্ব টান।

প্রমাণ। $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AE$,

$\triangle DBC = \frac{1}{2} BC \times DF$,

কিন্তু $\triangle ABC = \triangle DBC$; [কল্পনা

$\therefore \frac{1}{2} BC \times AE = \frac{1}{2} BC \times DF$,

$\therefore AE = DF$।

কিন্তু AE এবং DF উভয়েই BCএর উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল।

সুতরাং AE এবং DF পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ AD এবং EF পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ AD এবং BC পরস্পর সমান্তরাল। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, দুইটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজ এক সরল রেখার অন্তর্গত সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত হইলে, উহারা একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত থাকিবে।

অনুশীলনী

১। ত্রিভুজের প্রত্যেক মধ্যমা উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

২। সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় উহাকে যে চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। [ক. প্র., ঢা. বো.

৩। দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হইলে, যাহার ভূমি বৃহত্তর তাহার ক্ষেত্রফল বৃহত্তর। [ক. প্র.

৪। একটি ত্রিভুজকে সমান তিনভাগে বিভক্ত কর।

৫। ABCD একটি সামন্তরিক ক্ষেত্র এবং O উহার অন্তর্গত একটি বিন্দু প্রমাণ কর যে, AOB এবং COD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। [ক. প্র.

৬। ২৫ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্য-বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক-রেখা তৃতীয় বাহুটির সহিত সমান্তরাল।

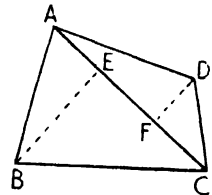
[ঢা. বো., ক. প্র.

৭। চতুর্ভুজের একটি কর্ণ উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ঐ কর্ণটি অপর কর্ণটিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [বো. বি.

৮। ABCD একটি সামন্তরিক। BC এবং CD বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে E এবং F হইলে, প্রমাণ কর যে $\triangle AEF$এর ক্ষেত্রফল সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলের $\frac{3}{8}$ অংশ।

চতুর্ভুজের কালি-নির্ণয়

১। মনে কর, ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার কালি নির্ণয় করিতে হইবে।

AC সংযুক্ত কর। B এবং D হইতে ACএর উপর যথাক্রমে BE এবং DF লম্ব অঙ্কিত কর। এখন ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \triangle ABC + \triangle ADC$$

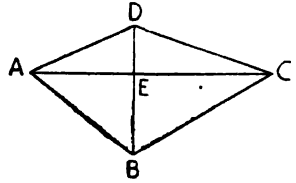
$$= \frac{1}{2}\, AC \times BE + \frac{1}{2}\, AC \times DF = \frac{1}{2} AC(BE + DF)$$

$= \frac{1}{2} \times$ একটি কর্ণ $\times$ ঐ কর্ণের উপর বিপরীত শীর্ষদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি।

২। চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC, BD পরস্পর E বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিলে, $ABCD = \frac{1}{2}AC.BE + \frac{1}{2}AC.DE$

$= \frac{1}{2} AC (BE + DE)$

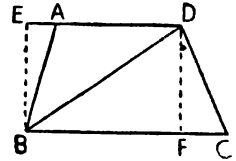
$= \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2}$ একটি কর্ণ × অপর কর্ণ

অর্থাৎ কর্ণদ্বয়ের সমান-বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় লম্বভাবে ছেদ করে।

সুতরাং কোন রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ এক কর্ণ × অপর কর্ণ।

সংজ্ঞা। প্রথম চিত্রে B এবং D হইতে ACএর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়কে **অফ্‌সেট** (Offsct) বলা হয়।

৩। **ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল।**

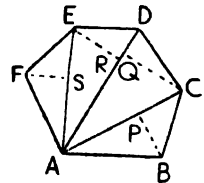
মনে কর, ABCD ট্রাপিজিয়মের AD এবং BC বাহুদ্বয় সমান্তরাল। ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

B এবং D হইতে BE এবং DF যথাক্রমে AD এবং BCএর উপর লম্ব টান। BD সংযুক্ত কর।

ট্রাপিজিয়াম $ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} AD.BE + \frac{1}{2} BC.DF$

$= \frac{1}{2} AD.BE + \frac{1}{2} BC.BE = \frac{1}{2} BE (AD + BC)$

$= \frac{1}{2}$সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × উচ্চতা।

৪। **বহুভুজের ক্ষেত্রফল**

প্রথম প্রণালী। মনে কর ABCDEF একটি বহুভুজ। AC, AD এবং AE সংযুক্ত কর। AC, AD, AD ও AE এর উপর যথাক্রমে BP, CQ, ER এবং FS লম্ব অঙ্কিত কর।

এখন বহুভুজ ABCDEF

$= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF$

$= \frac{1}{2} AC.\ BP + \frac{1}{2} AD.\ CQ + \frac{1}{2} AD.\ ER + \frac{1}{2} AE.\ FS$ ।

দ্বিতীয় প্রণালী (সাধারণ জরিপ করিবার প্রণালী)

এই স্থলে AD সংযুক্ত করিয়া B, C, E এবং F হইতে BP, CQ, ER এবং FS লম্ব টানিয়া অফ্‌সেট অঙ্কিত হইয়াছে।

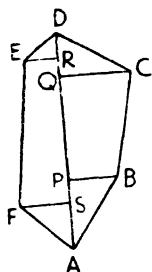
AD = 90 গজ, AR = 80 গজ,

AQ = 75 গজ, AP = 30 গজ,

AS = 20 গজ।

আবার অফসেট BP = 20 গজ, CQ = 30 গজ,

ER = 10 গজ, FS = 20 গজ।

ইহা জরিপ করিতে আমিনের বহিতে এইরূপ লিখা হয়।—

	গজ	
E পর্যন্ত 10	D পর্যন্ত	
	90	C পর্যন্ত 25
F পর্যন্ত 20	80	
	75	B পর্যন্ত 20
	30	
	20	
	A হইতে	

ABCDEF এর ক্ষেত্রফল

$= \triangle APB + \triangle ASF + \triangle CQD + \triangle ERD +$ ট্রাপিBPQC + ট্রাপিFSRE

$= \frac{1}{2} AP.BP + \frac{1}{2} AS.FS + \frac{1}{2} CQ.QD + \frac{1}{2} ER.DR +$

$\frac{1}{2} PQ\ (BP + CQ) + \frac{1}{2} SR\ (ER + FS)$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 20 + \frac{1}{2} \times 20 \times 20 + \frac{1}{2} \times 30 \times 15 + \frac{1}{2} \times 10 \times 10$

$+ \frac{1}{2} \times 45\ 20 + 30) + \frac{1}{2} \times 60(10 + 20)$

$= 300 + 200 + 225 + 50 + 1125 + 900$ বর্গ গজ

$= 2800$ বর্গ গজ।

অনুশীলনী

১। একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় 10′ এবং 16′ ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

২। ABCD চতুর্ভুজের B এবং D হইতে AC-এর উপর যথাক্রমে BE এবং DF লম্ব অঙ্কিত করা হইল। যদি AC = 3″, BE = 2″ এবং DF = 1.4″ হয়, চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। একটি রম্বসের ক্ষেত্রফল 192 বর্গফিট, উহার বাহু 10′ এবং একটি কর্ণ 16′ হইলে, অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

উপপাদ্য ২৬

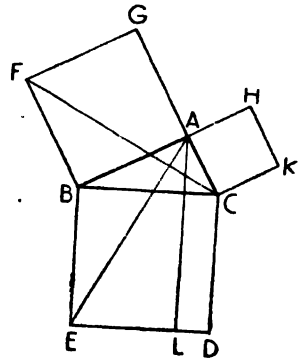
কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

[In a right-angled triangle the square described on the hypotenuse is equal to the sum of the squares described on the other two sides.]

মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠BAC সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইতে হইবে যে,

BCএর উপর বর্গক্ষেত্র = ABএর উপর বর্গক্ষেত্র + ACএর উপর বর্গক্ষেত্র।

অঙ্কন। BC, CA এবং AB বাহুর উপর যথাক্রমে BCDE, CAHK এবং ABFG বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কিত কর। A বিন্দু হইতে BE অথবা CDএর সমান্তরাল AL অঙ্কিত কর। AL, EDকে L বিন্দুতে ছেদ করিল। AE ও CF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\angle BAC$ ও $\angle BAG$ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ AC ও AG একই সরল রেখায় অবস্থিত।

এইরূপ AB ও AH একই সরল রেখায় অবস্থিত।

$\angle CBE = \angle FBA$, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

উভয়ের সঙ্গে $\angle ABC$ যোগ কর,

$\therefore \quad \angle ABE = \angle FBC$।

এখন ABE এবং FBC ত্রিভুজদ্বয়ের

$AB = FB$,

$BE = BC$,

এবং $\angle ABE = \angle FBC$,

$\therefore \quad \triangle ABE = \triangle FBC$। [উপ ৪

আবার, আয়তক্ষেত্র $BL = 2\triangle ABE$, কারণ উহারা একই ভূমি BEএর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় BE ও ALএর মধ্যে অবস্থিত। [উপ ২৩, অনু ১

এবং বর্গক্ষেত্র $BG = 2\triangle FBC$, কারণ উহারা একই ভূমি BFএর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় BF ও CGএর মধ্যে অবস্থিত। [উপ ২৩, অনু ১

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BL = বর্গক্ষেত্র BG।

এইরূপ AD এবং BK সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে যে,

আয়তক্ষেত্র CL = বর্গক্ষেত্র CH।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র BCDE = আয়তক্ষেত্র BL + আয়তক্ষেত্রে CL

= বর্গক্ষেত্র BG + বর্গক্ষেত্র CH।

অর্থাৎ অতিভুজ BCএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র BC^2,

এইরূপ AB এবং CA বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র যথাক্রমে AB^2 এবং CA^2 লিখিত হয়।

সুতরাং $BC^2 = CA^2 + AB^2$ ।

অর্থাৎ $a^2 = b^2 + c^2$,

$\therefore \quad b^2 = a^2 - c^2$,

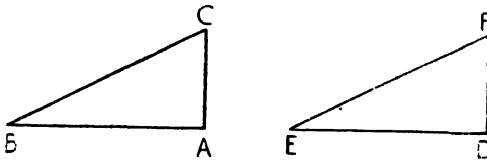
এবং $\quad c^2 = a^2 - b^2$ ।

অতএব সমকোণী ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহু দেওয়া থাকিলে তৃতীয় বাহুটি নির্ণয় করা যায়।

এই উপপাদ্যকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Theorem of Pythagorus) বলা হয়।

উপপাদ্য ২৭

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে, শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।

[If the square described on one side of a triangle is equal to the sum of the squares described on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle].

মনে কর, ABC ত্রিভুজে

$BC^2 = CA^2 + AB^2$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle CAB$ = এক সমকোণ।

অঙ্কন। ABএর সমান DE সরলরেখা লও,

D বিন্দুতে DEএর লম্ব DF টান, এবং ACএর সমান DF ছেদ কর। EF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $AB = DE$, $\therefore AB^2 = DE^2$,

$AC = DF$, $\therefore AC^2 = DF^2$,

$\therefore AB^2 + AC^2 = DE^2 + DF^2$.

কিন্তু $AB^2 + AC^2 = BC^2$, [কল্পনা

এবং $DE^2 + DF^2 = EF^2$, [উপ ২৬

$\therefore BC^2 = EF^2$,

$\therefore BC = EF$।

এখন BAC এবং EDF ত্রিভুজদ্বয়ের

$AB = DE$,

$AC = DF$,

এবং $BC = EF$, [উপ. ৭

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore \angle BAC = \angle EDF =$ এক সমকোণ। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার দ্বিগুণ।

২। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি

3″, 4″, 5″ ; 15 cm., 20 cm., 25 cm. ; এবং $p^2 + q^2$, $2pq$, $p^2 - q^2$ হইলে, প্রত্যেক স্থলেই ত্রিভুজটি সমকোণী।

৩। ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু O হইতে যদি BC, CA এবং ABএর উপর যথাক্রমে OP, OQ এবং OR লম্বত্রয় অঙ্কিত হয়, প্রমাণ কর যে, $AR^2 + BP^2 + CQ^2 = AQ^2 + CP^2 + BR^2$।

৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্রের যোগফলের চতুর্গুণ, অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণের সমান হইবে।

৫। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, এবং A হইতে AD, BCএর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $4AD^2 = 3BC^2$। [ক. প্র.

৬। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র, যে কোন বিন্দু Pএর সহিত উহার কৌণিক বিন্দুগুলি সংযুক্ত করা হইল। প্রমাণ কর যে,

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$ । [ক. প্র.

৭। দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৮। দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৯। একটি সরল রেখাকে এরূপভাবে দ্বিখণ্ডিত কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

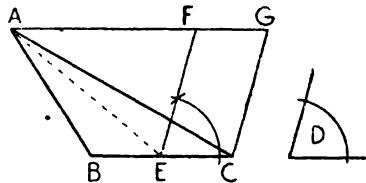
১০। একটি সরল রেখাকে এইরূপে দ্বিখণ্ডিত কর যেন অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

সম্পাদ্য ১৬

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি সামন্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[To construct a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.]

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং D নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি সামন্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABC এর সমান এবং যাহার একটি কোণ ∠Dএর সমান হইবে।

অঙ্কন। BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং E বিন্দুতে ∠Dএর সমান করিয়া ∠CEF অঙ্কিত কর। C দিয়া EFএর সমান্তরাল CG অঙ্কিত কর।

A দিয়া BCএর সমান্তরাল করিয়া AFG অঙ্কিত কর, উহা যেন EF এবং CGকে F এবং G বিন্দুতে ছেদ করে।

CEFG অভীষ্ট সামন্তরিক।

প্রমাণ। AE সংযুক্ত কর।

অঙ্কন দ্বারা CEFG একটি সামন্তরিক।

$\triangle AEC = \triangle AEB$ (কারণ উহাদের ভূমি সমান এবং একই উচ্চতা)

$= \frac{1}{2}\triangle ABC$।

আবার, $\triangle AEC = \frac{1}{2}$ সামন্তরিক CEFG, কারণ উহারা একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ সামন্তরিক CEFG $= \triangle ABC$,

এবং ইহার একটি কোণ CEF, নির্দিষ্ট $\angle D$এর সমান।

অতএব CEFG অভীষ্ট সামন্তরিক। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট কোণ সমকোণ হইলে, সামন্তরিকটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

সম্পাদ্য ১৭

কোন নির্দিষ্ট বহুভুজের সমান-ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle equal in area to a given polygon.]

মনে কর, ABCDEF একটি বহুভুজ। ইহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD এবং AE সংযুক্ত কর। C এবং F বিন্দু দিয়া CG এবং FH যথাক্রমে BD এবং AEএর সমান্তরাল টান, যেন উহারা বর্ধিত AB বাহুকে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করে। DG, EH এবং EG সংযুক্ত কর। D বিন্দু দিয়া DK, EGএর সমান্তরাল টান যেন উহা বর্ধিত HGকে K বিন্দুতে ছেদ করে। EK সংযুক্ত কর। EHK অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। BD এবং CG সমান্তরাল,

∴ $\triangle BGD = \triangle BCD$,

উভয়ের সহিত ABDEF ক্ষেত্রটি যোগ কর,

∴ AGDEF পঞ্চভুজটি = ABCDEF ষড়ভুজ।

আবার, AE এবং FH সমান্তরাল,

∴ $\triangle AHE = \triangle AFE$,

উভয়ের সহিত AGDE ক্ষেত্রটি যোগ কর,

∴ EHGD চতুর্ভুজটি = AGDEF পঞ্চভুজ।

সর্ব্বশেষ, DK এবং EG সমান্তরাল,

∴ $\triangle GKE = \triangle GDE$,

উভয়ের সহিত EHG ত্রিভুজটি যোগ কর।

∴ ত্রিভুজ EHK = EHGD চতুর্ভুজ

= AGDEF পঞ্চভুজ

= ABCDEF ষড়ভুজ। ই. স. বি.

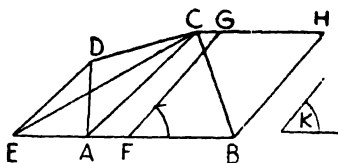
দ্রষ্টব্য। এই সম্পাদ্যে বহুভুজটিকে পর পর একটি করিয়া বাহু কমাইয়া ত্রিভুজে পরিণত করা হইয়াছে।

সম্পাদ্য ১৮

একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের সমান একটি সামন্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[To describe a parallelogram equal to a given rectilineal figure, having one of its angles equal to a given angle.]

মনে কর, ABCD একটি ঋজুরেখ-ক্ষেত্র এবং K নির্দিষ্ট কোণ।

ABCD-এর সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি সামন্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার একটি কোণ ∠Kএর সমান হইবে।

অঙ্কন। AC সংযুক্ত কর। D বিন্দু দিয়া ACএর সমান্তরাল DE টান যেন উহা বর্ধিত BAকে E বিন্দুতে ছেদ করে। CE সংযুক্ত কর।

∴ △CEB = নির্দিষ্ট ক্ষেত্র ABCD।

F বিন্দুতে BEকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

F হইতে FG রেখা টান যেন ∠BFG = ∠K,

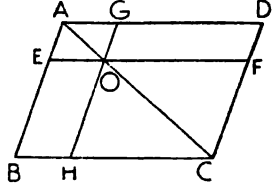
B বিন্দু দিয়া FGএর সমান্তরাল BH টান।

এবং C বিন্দু দিয়া BEএর সমান্তরাল CGH অঙ্কিত কর যেন উহা FG এবং BHকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করে। BFGH অভীষ্ট সামন্তরিক।

প্রমাণ। অঙ্কনদ্বারা BFGH একটি সামন্তরিক,

এখন BFGH = △CEB [সম্পাদ্য ১৬

= নির্দিষ্ট ক্ষেত্র ABCD.

সংজ্ঞা। ABCD সামন্তরিকের AC কর্ণের O বিন্দু হইতে EF এবং GH উহার বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল টানিলে EG এবং FH সামন্তরিকদ্বয়কে **কর্ণের পরিতঃস্থ সামন্তরিক** (parallelograms about the diagonal) এবং EH ও GF সামন্তরিকদ্বয়কে উহাদের পূরক (complements) বলা হয়।

অনুশীলনী

১। উপরি-উক্ত চিত্রে প্রমাণ কর যে পূরকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

২। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি সামন্তরিক অঙ্কিত কর যেন উহা একটি ত্রিভুজের সমান হয় এবং উহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

৩। একটি আয়তক্ষেত্রের সমান একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

৪। একটি সামন্তরিক অঙ্কিত কর যেন উহা একটি ত্রিভুজের সমান হয় এবং উহার পরিসীমা ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান হয়।

৫। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর D একটি বিন্দু, BDকে ভূমি করিয়া △ABCএর ক্ষেত্রফলের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

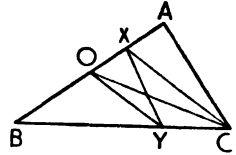
৬। P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ, △ABCএর সমান করিয়া এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার শীর্ষ P বিন্দুতে থাকে এবং ভূমি BCএর সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়।

৭। ABCD চতুর্ভুজের সমান করিয়া এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার শীর্ষ ADএর উপর P বিন্দুতে থাকে এবং উহার ভূমি BCএর সহিত একই সরল রেখায় অবস্থিত হয়।

৮। শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত রেখা টানিয়া একটি ত্রিভুজকে 5, 7, 10 এবং n সমান অংশে বিভক্ত কর।

৯। ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর একটি বিন্দু হইতে রেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

(Bisect a triangle by a straight line drawn from a given point in one of its sides).

ABC ত্রিভুজের AB বাহুর উপর X বিন্দু অবস্থিত। X বিন্দু হইতে একটি রেখা টানিয়া ABC ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। XC সংযুক্ত কর; ABকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং O দিয়া XCএর সমান্তরাল করিয়া OY টান যেন উহা BCকে Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY সংযুক্ত কর। XY অভীষ্ট সরলরেখা।

প্রমাণ। OC সংযুক্ত কর।

$AO = BO$,

$\therefore \quad \triangle AOC = \triangle BOC$ (সমান সমান ভূমি এবং একই উচ্চতা)

$= \frac{1}{2} \triangle ABC$।

আবার, $\triangle OXY = \triangle OCY$ (একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত)। উভয়ের সহিত $\triangle OBY$ যোগ কর।

$\therefore \quad \triangle BXY = \triangle BOC = \frac{1}{2} \triangle ABC$।

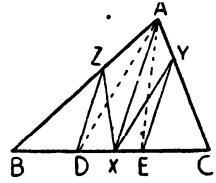
$\therefore$ XY, ABC ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। ই. স. বি.

১০। ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর একটি বিন্দু হইতে রেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত কর।

(Trisect a triangle by straight lines drawn through a point on one of its sides.)

মনে কর, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর X বিন্দু হইতে রেখা টানিয়া উহাকে ত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BC বাহুকে D ও E বিন্দুতে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর। AX সংযুক্ত কর।

D ও E বিন্দু দিয়া AXএর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে DZ এবং EY অঙ্কিত কর। XY এবং XZ সংযুক্ত কর। XY এবং XZ ত্রিভুজটিকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিবে।

প্রমাণ। AD এবং AE সংযুক্ত কর।

$BD = DE = EC$,

$\therefore \quad \triangle ABD = \triangle ADE = \triangle AEC$, কারণ উহাদের একই উচ্চতা।

$= \frac{1}{3} \triangle ABC$।

এখন $\triangle DXZ = \triangle DAZ$, একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

উভয়ের সহিত $\triangle ZBD$ যোগ কর,

$\therefore \quad \triangle ZBX = \triangle ABD = \frac{1}{3} \triangle ABC$।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$\triangle YCX = \triangle AEC = \frac{1}{3} \triangle ABC$,

$\therefore$ অবশিষ্ট চতুর্ভুজ $AZXY = \frac{1}{3} \triangle ABC$।

$\therefore$ XY এবং XZ ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত করিল। ই. স. বি.

১১। চতুর্ভুজের যে-কোন শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটি সমদ্বিখণ্ডিত কর। [ক. প্র.

ABCD চতুর্ভুজের সমান করিয়া ABE ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। BE বাহু X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। AX সংযুক্ত কর।

$BX = XE$, $\therefore \triangle ABX = \triangle AXE = \frac{1}{2} \triangle ABE$

$= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD।

$\therefore$ AX চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

১২। একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটির যে-কোন অংশ ($\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{n}$) ছেদ কর।

১৩। একটি চতুর্ভুজের কোন শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহার যে-কোন অংশ ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$,...$\frac{1}{n}$) ছেদ কর।

১৪। একটি ত্রিভুজের সমান-ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি সামন্তরিক অঙ্কিত কর, যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। [ক. প্র.

১৫। একটি ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিস্থ কোণ দুইটির অন্তর এবং অপর বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

AB নির্দিষ্ট ভূমি, P ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং K বাহুদ্বয়ের সমষ্টি। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

∠Pকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

B হইতে BD রেখা অঙ্কিত কর যেন ∠ABD = $\frac{1}{2}$ ∠P। BE, BDএর লম্ব টান। A কেন্দ্র করিয়া K ব্যাসার্ধ লইয়া একটী চাপ অঙ্কিত কর, যেন উহা BEকে E বিন্দুতে ছেদ করে। AE সংযুক্ত কর, ইহা BDকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। B হইতে BC অঙ্কিত কর যেন ∠EBC = ∠AEB। BC, AEকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

∠CEB = ∠CBE, ∴ BC = CE,

∴ AC + BC = AC + CE = AE = K।

আবার ∠CDB = ∠CEB এর পূরক = ∠CBEএর পূরক = ∠CBD = ∠CBA − ∠ABD।

∴ ∠CBA − ∠ABD = ∠CDB = ∠CAB + ∠ABD,

∴ ∠CBA — ∠CAB = 2∠ABD = ∠P.

∴ ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

১৬। ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব ও একটি বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

১৮। AB এবং AC, ABC ত্রিভুজের অসমান দুই বাহু; AX উহার মধ্যমা, AD, A হইতে BCএর উপর লম্ব এবং AE, $\angle BAC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC কে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AE এর অবস্থান এবং দৈর্ঘ্য AD এবং AXএর মধ্যবর্তী।

(সঙ্কেত—AX, F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $XF = AX$ হয়। XC সংযুক্ত কর।)

১৯। কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর ভূমির এক সীমা-বিন্দু হইতে লম্ব টানিলে, ঐ লম্ব বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকের সহিত যে-কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক হইবে। এবং উহা ভূমির সহিত যে-কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেক হইবে।

২০। কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্ভূত কোণ ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেক হইবে।

২১। একটি চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয় এবং তাহাদের একটি অন্তর্ভূত কোণদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

২২। ABCD সামন্তরিকের $\angle BAD$ বা উহার বিপরীত কোণ BCD এর বাহিরে O বিন্দু অবস্থিত। $\triangle OAC$, OAB এবং OAD ত্রিভুজদ্বয়ের সমষ্টির সমান প্রমাণ করিতে হইবে।

যদি O বিন্দু $\angle BAD$ অথবা উহার বিপরীত কোণের অভ্যন্তরে হয়, তবে $\triangle OAC$, OAB এবং OAD ত্রিভুজদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।

২৩। কোন নির্দিষ্ট সামন্তরিকের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট এবং নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি বাহু-বিশিষ্ট একটি সামন্তরিক অঙ্কন কর।

(To construct a parallelogram equal to a given paralielogram and having one side of given length).

মনে কর, ABCD নির্দিষ্ট সামন্তরিক এবং K নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য। BC হইতে K এর সমান BE লও। AE সংযুক্ত কর। C দিয়া AEএর সমান্তরাল CF অঙ্কিত কর যেন উহা বর্ধিত BAকে F বিন্দুতে ছেদ করে। F হইতে BC এর সমান্তরাল FG টান, এবং E হইতে BF এর সমান্তরাল EG টান, যেন উহা FG কে G বিন্দুতে ছেদ করে। BEGF, অভীষ্ট সামন্তরিক। EF এবং AC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ—BEGF একটি সামন্তরিক এবং ইহার বাহু BE = K। $\triangle$FAE = $\triangle$CAE, একই বাহু AEএর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

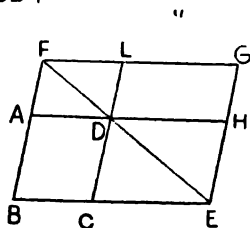
উভয়ের সহিত $\triangle$ABE যোগ কর,

$\therefore$ $\triangle$FBE = $\triangle$ABC,

কিন্তু সামন্তরিক BEGF = 2$\triangle$FBE,

এবং সামন্তরিক ABCD = 2$\triangle$ABC,

$\therefore$ সামন্তরিক BEGF = সামন্তরিক ABCD।

বিকল্প অঙ্কন। BC বর্ধিত করিয়া বর্ধিত অংশ হইতে K এর সমান CE লও। ED সংযুক্ত কর যেন উহা বর্ধিত BA কে F বিন্দুতে ছেদ করে। F এবং E হইতে BE এবং BF এর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে FG এবং EG অঙ্কিত কর। CD এবং AD বর্ধিত হইয়া যথাক্রমে FG এবং EG কে L এবং H বিন্দুতে ছেদ করিল। LDHG অভীষ্ট সামন্তরিক।

BEGF একটি সামন্তরিক এবং AC ও LH উহার পূরক।

$\therefore$ সামন্তরিক LDHG = সামন্তরিক ABCD।

২৪। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর, যাহার ক্ষেত্রফল আর একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে।

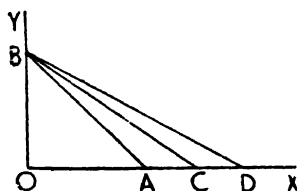
২৫। দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান-বাহুবিশিষ্ট একটি সামন্তরিক অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

২৬। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান একটি সামন্তরিক অঙ্কিত কর যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

অতিরিক্ত সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, ত্রিগুণ, চতুর্গুণ ইত্যাদি ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a square whose area shall be equal to twice, thrice, four times etc. that of a given square.]

OX এবং OY দুইটি পরস্পর লম্ব সরল রেখা অঙ্কিত কর। এককের (one unit) সমান OA এবং OB চিহ্নিত কর। AB সংযুক্ত কর।

এখন, $\angle AOB$ = সমকোণ,

$\therefore \quad AB^2 = OA^2 + OB^2 = 1 + 1 = 2, \quad \therefore AB = \sqrt{2}.$

আবার, OX হইতে ABএর সমান OC ছেদ কর। BC সংযুক্ত কর।

এখন $BC^2 = OC^2 + OB^2 = AB^2 + OB^2 = 2 + 1 = 3.$

$\therefore \quad BC = \sqrt{3}.$

এইরূপ BC এর সমান OD ছেদ কর। BD সংযুক্ত কর।

সুতরাং $BD^2 = OD^2 + OB^2 = BC^2 + OB^2 = 3 + 1 = 4$

$\therefore \quad BD = \sqrt{4}.$

দ্রষ্টব্য। এই অঙ্কন দ্বারা আমরা $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ প্রভৃতির মান নির্ণয় করিতে পারি।

অনুশীলনী

একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABCএর C সমকোণ ; p, C হইতে অতিভুজের উপর লম্ব , প্রমাণ করিতে হইবে

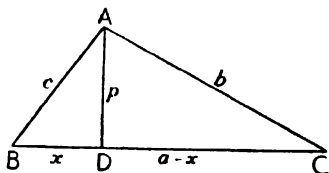
(১) $pc = ab$

এবং (২) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য হইতে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়

△ ABCএর BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$

ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

A হইতে BCএর উপর AD লম্ব টান।

মনে কর, AD $= p$, BD $= x$; $\therefore$ CD $= a - x$.

ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore \quad p^2 = c^2 - x^2$.

আবার ADC একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore \quad p^2 = b^2 - (a-x)^2$,

$\therefore \quad c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$,

$\therefore \quad 2ax = c^2 + a^2 - b^2$,

$$\therefore \quad x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$p^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{4c^2a^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{\{2ca+c^2+a^2-b^2\}\{2ca-c^2-a^2+b^2\}}{4a^2}$$

$$=\frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2}$$

$$=\frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}.$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2}.$$

$$=\frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4a^2}$$

এখানে $2s=a+b+c$,

স্থতরাং $b+c-a=2s-2a$,

$c+a-b=2s-2b$,

$a+b-c=2s-2c$,

$$\therefore\ p^2=\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4a^2}$$

$$\therefore\ p=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

কিন্তু, $\triangle$ ABCএর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ap$

$$=\frac{a}{2}\times\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

এখানে $s=$ ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক।

উদাহরণ। একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে 5″, 6″ এবং 7″, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে $s=\frac{1}{2}(5+6+7)$ inches $=9''$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}=6\times2{\cdot}45=14{\cdot}70$

অনুশীলনী

১। নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির কালি নির্ণয় কর—

(1) $a=6''$, $b=8''$, $c=10''$; (2) $a=3''$, $b=7''$, $c=8''$;

(3) $a=3{\cdot}2''$, $b=4{\cdot}8''$, $c=6{\cdot}4''$.

২। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি $a=7''$, $b=5''$, $c=3''$, A শীর্ষ হইতে BC এর উপর লম্বের পরিমাণ নির্ণয় কর।

তৃতীয় খণ্ড

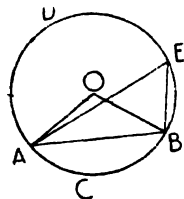
বৃত্ত (Circle)

সংজ্ঞা

বৃত্ত, কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, চাপ, বৃত্তার্ধ এবং পরিধির সংজ্ঞা পূর্বেই দেওয়া হইয়াছে। এই স্থলে বৃত্তসংশ্লিষ্ট আরও কয়েকটি সংজ্ঞা দেওয়া হইল।

১। পরিধির যে-কোন দুইটি বিন্দু সরল রেখাদ্বারা সংযুক্ত করিলে ঐ রেখাটিকে **জ্যা** (Chord) বলা হয়।

চিত্রে AB একটি জ্যা।

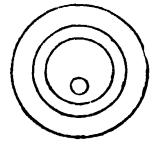
২। কোন জ্যা বৃত্তের পরিধিকে যে দুইটি চাপ-এ বিভক্ত করে তাহাদের বৃহত্তর অংশকে **অধিচাপ** (Major Arc) বলে, এবং ক্ষুদ্রতর অংশকে **উপচাপ** (Minor Arc) বলে। চিত্রে ADB অধিচাপ এবং ACB উপচাপ। ইহাদের একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** বা **প্রতিযোগী** (Conjugate) বলা হয়।

৩। কোন জ্যাদ্বারা যদি একটি বৃত্ত দুই খণ্ডে বিভক্ত হয়, তবে প্রত্যেক ভাগকে এক-একটি **বৃত্তাংশ** (Segment) বলা হয়। বৃত্তাংশ জ্যা এবং চাপদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র। বৃত্তাংশের জ্যাকে উহার **ভূমি** বলা যায়। চিত্রে জ্যা AB দ্বারা দ্বিখণ্ডিত ADB এবং ACB ক্ষেত্রদ্বয় বৃত্তাংশ।

৪। একটি বৃত্তাংশের চাপের যে-কোন বিন্দু উহার জ্যা-এর সীমাবিন্দুদ্বয়ের সহিত সংযুক্ত করিলে যে-কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে **বৃত্তাংশস্থিত কোণ** (angle in a segment) বলে। চিত্রে $\angle$AEB বৃত্তাংশস্থিত কোণ। যে

সমস্ত বৃত্তাংশের বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলি সমান তাহাদিগকে **সদৃশ বৃত্তাংশ** (similar segments) বলে।

৫। কোন বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ এবং উহাদের অন্তর্গত চাপদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা** (Sector) বলে। চিত্রে AOBC একটি বৃত্তকলা।

৬। বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া পরস্পর লম্ব দুইটি ব্যাস অঙ্কিত করিলে বৃত্তটি সমান চারি অংশকে বিভক্ত হইবে। উহার প্রত্যেক অংশকে **বৃত্তপাদ** বা **পাদ** (Quadrant) বলে। সুতরাং পাদ একটি বৃত্তকলা যাহার ব্যাসার্ধ দুইটির অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ।

৭। দুই বা ততোধিক বৃত্তের একই কেন্দ্র হইলে উহাদিগকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত** (Concentric Circle) বলে।

৮। যদি চারি কিংবা ততোধিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হয়, তবে উহাদিগকে **সমবৃত্তবিন্দু** বা **একবৃত্তস্থবিন্দু** (Concyclic Points) বলে।

৯। যে চতুর্ভুজের শীর্ষ-চতুষ্টয় দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাকে **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** (Cyclic Quadrilateral) বলে।

১০। বৃত্ত সম্বন্ধে যে সমস্ত সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে তাহা হইতে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি।

(১) বৃত্ত উহার পরিধিদ্বারা পরিবেষ্টিত সীমাবদ্ধ বক্ররেখ-ক্ষেত্র (Closed Curve)। অতএব একটি সরলরেখা উহাকে এক বিন্দুতে ছেদ করিলে, রেখাটি বর্ধিত করিলে উহা বৃত্তের পরিধিকে আর একটি বিন্দুতেও ছেদ করিবে। এইরূপ সরলরেখাকে বৃত্তের ছেদক (Secant) বলে।

(২) যে-কোন বিন্দু পরিধির অভ্যন্তরে, উপরে অথবা বাহিরে থাকিলে উহা হইতে কেন্দ্রের দূরত্ব যথাক্রমে ব্যাসার্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ব্যাসার্ধের সমান বা ব্যাসার্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

(৩) বিপরীত ক্রমে কোন বিন্দু হইতে কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ব্যাসার্ধের সমান কিংবা ব্যাসার্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বিন্দুটি

যথাক্রমে পরিধির অভ্যন্তরে, উহার উপরে কিংবা উহার বাহিরে অবস্থিত হইবে।

(৪) সমান সমান ব্যাসার্ধের সমস্ত বৃত্তই সমান। একটির কেন্দ্র আর একটির উপর স্থাপন করিলে বৃত্তগুলির সমাপতন হইবে। সুতরাং উহারা সর্বসম। কিন্তু দুইটি এক-কেন্দ্রীয় বৃত্তের অসমান ব্যাসার্ধ হইলে ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তটি অপর বৃত্তের সম্পূর্ণ অভ্যন্তরে থাকিবে, সুতরাং উহারা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

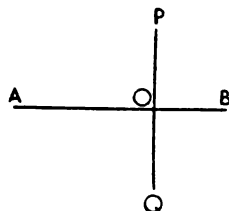
(৫) দুইটি এক-কেন্দ্রীয় বৃত্ত এক বিন্দুতে মিলিত হইলে, তাহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে, কেন্দ্র এবং একবিন্দু সাধারণ হইলে, উহাদের ব্যাসার্ধ সমান।

প্রতিসাম্য (Symmetry)

সংজ্ঞা। কোন চিত্রকে একটি সরলরেখার বরাবর ভাঁজ করিলে যদি ঐ রেখার উভয়পার্শ্বস্থ চিত্রাংশ দুইটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তাহা হইলে চিত্রটিকে সরলরেখার দুই পার্শ্বে **প্রতিসম** (Symmetrical about the line) বলা হয় এবং সরলরেখাটিকে চিত্রের **প্রতিসাম্য-অক্ষ** (Axis of Symmetry) বলে। অতএব কোন চিত্রের একটি প্রতিসাম্য রেখা থাকিলে উহার উভয় পার্শ্বস্থ চিত্রের প্রত্যেক অঙ্গ তুল্যরূপে অবস্থিত হইবে, সুতরাং সমানও হইবে।

মনে কর, বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে AB সরল রেখার উপর PO লম্ব টানা হইল, POকে Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল যেন OQ = PO।

এখন চিত্রটিকে AB এর বরাবর ভাঁজ করিলে P বিন্দু Q বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে। কারণ

$\angle AOP = \angle AOQ$, এবং $OP = OQ$।

এইরূপ হইলে Q বিন্দুটিকে প্রতিসাম্য রেখার উপর P বিন্দুর বিম্ব (image) বলা হয়, এবং P ও Q বিন্দুদ্বয়কে **প্রতিসাম্যরেখা সম্পর্কে বিপরীত বিন্দু** (symmetrically opposite with regard to the axis) বলা হয়।

উপপাদ্য ২৮

বৃত্ত উহার যে-কোন ব্যাসের প্রতিসম।

[A circle is symmetrical about any diameter.]

মনে কর, APB একটি বৃত্ত, C উহার কেন্দ্র এবং AB একটি ব্যাস।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বৃত্তটি ABএর উভয় পার্শ্বে প্রতিসম অর্থাৎ AB বৃত্তটির প্রতিসাম্য-রেখা।

APB চাপের উপর P বিন্দু লও, PC সংযুক্ত কর, C হইতে CQ ব্যাসার্ধ অঙ্কিত কর যেন $\angle BCQ = \angle BCP$।

ABএর বরাবর বৃত্তটিকে ভাঁজ কর।

যেহেতু $\angle BCP = \angle BCQ$, $\therefore$ CP, CQএর উপর পড়িবে।

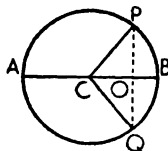
কিন্তু $CP = CQ$,

$\therefore$ P বিন্দু Q বিন্দুর উপর পড়িবে।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, APB চাপের প্রত্যেক বিন্দুই AQB চাপের কোন এক বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে এবং ABএর উভয় পার্শ্বস্থ APB এবং AQB চাপদ্বয় সম্পূর্ণ মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ AB, বৃত্তটির প্রতিসাম্য রেখা। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। PQ যোগ কর, ইহা যেন ABকে O বিন্দুতে ছেদ করে। এখন AB রেখার বরাবর বৃত্তটি ভাঁজ করিলে P, Q বিন্দুর সহিত মিলিত হওয়ায় PO, QOএর সহিত সম্পূর্ণ মিলিয়া যাইবে, সুতরাং $OP = OR$ এবং

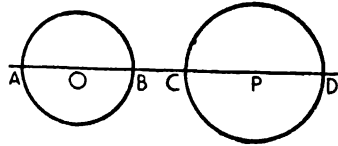
$\angle POC = \angle QOC$।

ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেক সমকোণ,

∴ P এবং Q, AB প্রতিসাম্য রেখা সম্পর্কে পরস্পর বিপরীত বিন্দু।

বিপরীতক্রমে, কোন বৃত্তের পরিধির উপর P বিন্দু অবস্থিত হইলে, উহার বিপরীত বিন্দু Qও উহার পরিধির উপর অবস্থিত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা বৃত্ত দুইটির প্রতিসাম্য রেখা।

(Two circles are symmetrical about the line of centres.)

মনে কর, O এবং P দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং উহাদের সংযোজক রেখা বৃত্ত দুইটিকে A ও B এবং C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, O বৃত্তের ব্যাস, সুতরাং AB, O বৃত্তের প্রতিসাম্য-রেখা।

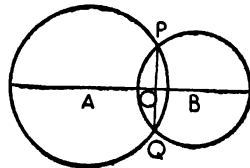
এইরূপ CD, P বৃত্তের প্রতিসাম্য-রেখা।

∴ ABCD উভয় বৃত্তের প্রতিসাম্য-রেখা।

উপপাদ্য ২৯

দুইটি বৃত্ত এক বিন্দুতে ছেদ করিলে উহারা অপর এক বিন্দুতেও ছেদ করিবে; এবং উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা সাধারণ জ্যাকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[If two circles cut one another in one point they also cut one another in one other point, and the line of centres bisects the common chord at right angles.]

দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র A এবং B, বৃত্তদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। PO, ABএর উপর লম্ব টান, বর্ধিত PO হইতে PO এর সমান OQ ছেদ কর।

∴ AB প্রতিসাম্য রেখা সম্পর্কে Q, Pএর বিপরীত বিন্দু।

কিন্তু P উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত।

∴ Qও উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে। ই. উ. বি.

এবং অঙ্কনদ্বারা AB, PQকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

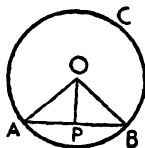
বৃত্তের জ্যা-সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য ৩০

কোন বৃত্তের কেন্দ্রের সহিত কেন্দ্রগামী নহে এইরূপ কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করিলে, সংযোজক রেখাটি উক্ত জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে উহা জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[If a straight line drawn from the centre of a circle bisects a chord which does not pass through the centre, it cuts the chord at right angles.

Conversely, if it cuts the chord at right angles, it bisects it.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের O কেন্দ্র এবং AB একটি জ্যা যাহা কেন্দ্রগামী নহে। OP, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, OP, AB-এর উপর লম্ব।

OA, OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। OPA, OPB ত্রিভুজদ্বয়ের

AP = BP,

OP সাধারণ বাহু,

OA = OB,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ ∠OPA = ∠OPB, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ,

∴ উহারা প্রত্যেকেই সমকোণ।

স্থতরাং OP, ABএর উপর লম্ব।

বিপরীতক্রমে, মনে কর, OP, AB-এর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AP = BP।

প্রমাণ। OPA, OPB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB,

OP সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ AP = BP। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। একটি বৃত্তের কোন জ্যাএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

কারণ, AB জ্যা, O কেন্দ্র এবং PQ লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক হইলে PQএর উপর প্রত্যেক বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী এবং PQএর বহিঃস্থ কোন বিন্দুই A এবং B হইতে সমদূরবর্তী নহে। কিন্তু ব্যাসার্ধ বলিয়া OA = OB, অতএব O, PQএর উপর অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কোন সরল রেখা একটি বৃত্তকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

কারণ, মনে কর AB জ্যা, বৃত্তটিকে তিন বিন্দু A, B এবং Eতে ছেদ করিল। কেন্দ্র O হইতে ABEএর উপর OD লম্ব টানিলে উহা AB এবং AE উভয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। স্থতরাং DB = DE, সমগ্র রেখা উহার অংশের সমান, ইহা অসম্ভব।

অতএব AB, বৃত্তটিকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অনুশীলনী

১। 1·5″ ব্যাসের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং উহাতে 1″ এবং ·8″ লম্বা দুইটি জ্যা স্থাপন কর। কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

২। 1·6″ ব্যাসের একটী বৃত্তে 1″ এবং 1·2″ দীর্ঘ দুইটি সমান্তরাল জ্যা অঙ্কিত কর, এবং তাহাদের পরস্পর দূরত্ব নির্ণয় কর।

৩। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন উহা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৪। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে সাধারণ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু এবং বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ইহা হইতে প্রমাণ কর যে দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা সাধারণ জ্যাকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(Hence prove that if two circles intersect the line of centres bisects the common chord at right angles.)

৫। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্য-বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন রেখাটি কেন্দ্র দিয়া যাইবে। [ক. প্র.

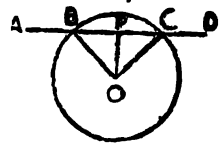
৬। কোন বৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(Find the locus of the middle points of a series of parallel chords in a circle.) [এ. প্র.

৭। দুইটি পরস্পর-ছেদী জ্যা উভয়েই কেন্দ্রগামী না হইলে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না। [ক. প্র

৮। কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে উহাদের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

৯। কোন মাঠে একটি খুঁটিতে আবদ্ধ ছাগল l দূরত্ব পর্যন্ত নাগাল পায়। যদি একটি সরলরেখায় অবস্থিত চারা গাছের একটি সারি খুঁটি হইতে d দূরে থাকে এবং $d<l$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ছাগলটি উক্ত সারির $2\sqrt{l^2-d^2}$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট স্থানের চারাগাছ খাইতে পারিবে। [ক. প্র.

O খুঁটি, ABCD চারাগাছের সারি। O কেন্দ্র করিয়া l ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন উহা সারিটিকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ছাগলটি বৃত্তের বাহিরে কোন স্থানই নাগাল পায় না। সুতরাং চারার সারির B হইতে C পর্যন্ত নাগাল পাইবে। BCএর উপর OP লম্ব টান। সুতরাং PB = CP।

$BC = BP + CP = 2BP,$

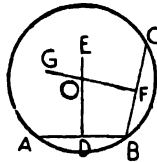
কিন্তু $BP^2 = OB^2 - OP^2 = l^2 - d^2$, $\therefore$ $BP = \sqrt{l^2-d^2}$.

$\therefore$ $BC = 2BP = 2\sqrt{l^2-d^2}$.

১০। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমান্তরাল করিয়া একটি ছেদবিন্দু দিয়া পরিধি পর্যন্ত সরলরেখা টানিলে উহা সংযোজক রেখাটির দ্বিগুণ হইবে।

উপপাদ্য ৩১

তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত না হইলে উহাদের মধ্য দিয়া কেবল একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে, একাধিক নহে।

[One and only one circle can pass through any three given points that are not in the same straight line.]

মনে কর, তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B এবং C দিয়া কেবল একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন। AB এবং BC সংযুক্ত কর। DE এবং FG যথাক্রমে AB এবং BCএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর। AB এবং BC একই সরলরেখার অন্তর্গত নহে, সুতরাং DE এবং FG সমান্তরাল হইতে পারে না, অতএব উহারা পরস্পর ছেদ করিবে।

মনে কর, DE এবং FG, Oবিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। কারণ DE, ABএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক,

∴ DEএর উপর প্রত্যেক বিন্দুই A এবং B হইতে সমদূরবর্তী এবং DEএর বাহিরে কোন বিন্দুই A এবং B হইতে সমদূরবর্তী নহে।

এইরূপ FGএর উপর প্রত্যেক বিন্দু B এবং C হইতে সমদূরবর্তী এবং FGএর বাহিরে কোন বিন্দুই B এবং C হইতে সমদূরবর্তী নহে।

সুতরাং DE এবং FGএর একমাত্র সাধারণ বিন্দুO, A, B এবং C হইতে সমদূরবর্তী। এবং O ভিন্ন আর কোন বিন্দু নাই যাহা A, B এবং C হইতে সমদূরবর্তী।

∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা B এবং C দিয়া যাইবে, এবং ইহাই একমাত্র বৃত্ত যাহা A, B এবং C বিন্দু দিয়া যাইবে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। যে সকল বৃত্তের পরিধির যে-কোন তিনটি বিন্দু সাধারণ, তাহারা পরস্পরের উপর সমাপতিত হয়।

(The circles which have three points common must coincide.)

অনুসিদ্ধান্ত ২। একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

(One circle cannot cut another at more than two points.) [ক. প্র.

কারণ তিনটি বিন্দু বৃত্তদ্বয়ের মধ্যে সাধারণ হইলে উহারা একই বৃত্ত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে তিন বা ততোধিক সমান সরলরেখা টানিতে পারা যায়, তবে ঐ বিন্দুটি বৃত্তটির কেন্দ্র হইবে।

(If from a point within a circle, more than two equal straight lines can be drawn to the circumference, that point is the centre of the circle.)

মনে কর, বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ O বিন্দু হইতে পরিধি পযন্ত অঙ্কিত সরলরেখাত্রয় OA, OB এবং OC পরস্পর সমান।

AB এবং BC সংযুক্ত কর। যেহেতু OA = OB,

∴ O বিন্দু ABএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

এইরূপ O বিন্দু BCএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

অর্থাৎ AB এবং BC জ্যা দুইটির সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ Oই বৃত্তটির কেন্দ্র।

দ্রষ্টব্য—এই প্রতিজ্ঞাদ্বারা একই সরলরেখার অন্তর্গত নহে, এইরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়। সুতরাং কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

সংজ্ঞা। কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উহার **পরিবৃত্ত** (Circumscribed Circle) বলে। পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) এবং তাহার ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলা হয়।

পরিবৃত্তটিকে ত্রিভুজের চতুর্দিকে 'পরিলিখিত'(Circumscribed) বলা হয়।

অনুশীলনী

১। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যে সকল বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায় তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[To find the locus of the centres of circles passing through two fixed points]

২। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহার ব্যাসার্ধ

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হইবে। ইহা কোন্ অবস্থায় অসম্ভব হইবে ?

৩। একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরল-রেখার উপর অবস্থিত হইবে এবং যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

কি অবস্থায় ইহা অসম্ভব হইবে ?

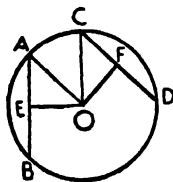
৪। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু হইবে।

৫। প্রমাণ কর যে, আয়তক্ষেত্রের শীর্ষগুলি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

৬। অতিভুজের মধ্যবিন্দুই সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

উপপাদ্য ৩২

কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলি উহার কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী। বিপরীতক্রমে, যে সকল জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী তাহারা পরস্পর সমান।

[Equal chords of a circle are equidistant from the centre.
Conversely, chords which are equidistant from the centre are equal.]

মনে কর O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র, এবং AB ও CD উহার দুইটি জ্যা। O হইতে AB এবং CDএর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব টানা হইল।

প্রথমতঃ মনে কর AB = CD, প্রমাণ করিতে হইবে যে OE = OF।

প্রমাণ। OA এবং OC সংযুক্ত কর।

যেহেতু OE এবং OF, AB এবং CDএর উপর লম্ব।

∴ OE এবং OF যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে AB এবং CDকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ $AE = \frac{1}{2} AB$, এবং $CF = \frac{1}{2} CD$;

কিন্তু $AB = CD$,

∴ $AE = CF$।

এখন AEO, CFO ত্রিভুজদ্বয়ের

AEO এবং CFO সমকোণ,

অতিভুজ AO = অতিভুজ CO, কারণ উভয়েই ব্যাসার্ধ,

এবং $AE = CF$, [প্রমাণিত]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $OE = OF$।

বিপরীত ক্রমে, মনে কর $OE = OF$,

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB = CD$।

প্রমাণ করা হইয়াছে,

$AE = \frac{1}{2} AB$, এবং $CF = \frac{1}{2} CD$।

এখন AEO এবং CFO ত্রিভুজদ্বয়ের

AEO এবং CFO সমকোণ,

$AO = CO$,

এবং $OE = OF$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $AE = CF$।

∴ উহাদের দ্বিগুণ, $AB = CD$। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। 1" ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং উহাতে $\frac{1}{3}$" লম্বা চারিটি জ্যা অঙ্কিত কর। প্রমাণ কর, উহাদের মধ্যবিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

২। কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ক. প্র., ঢা. বো.

[Find the locus of the middle points of equal chords in a circle.]

৩। দুইটি জ্যা পরস্পর এক বিন্দুতে ছেদ করিলে এবং ঐ বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিলে, জ্যা দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

৪। কোন বৃত্তের দুইটি সমান সমান জ্যা ছেদ করিলে, উহাদের একটির দুই অংশ যথাক্রমে অপরটির দুই অংশের সমান হইবে।

৫। একটি বৃত্তে এমন একটি জ্যা স্থাপন কর যেন উহা ব্যাস অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান হয়।

৬। একটি বৃত্তে এমন একটি জ্যা স্থাপন করিতে হইবে যেন উহা ব্যাস অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান হয় এবং অপর একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

৭। কোন বৃত্তের যে-কোন ব্যাস ABএর A ও B বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট জ্যা PQ অথবা বর্ধিত PQএর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি কিংবা অন্তর নিয়ত সমান (constant)।

৮। বৃত্তের কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত যে-কোন সমান্তরাল জ্যা দুইটি পরস্পর সমান।

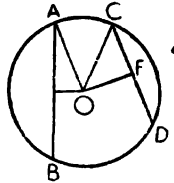
৯। AB এবং AC সমান জ্যা দুইটির অন্তর্ভূত ∠BACএর সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র ভেদ করিবে। [ক. প্র.

উপপাদ্য ৩৩

কোন বৃত্তের কেন্দ্রের নিকটতর জ্যা অপেক্ষাকৃত দূরবর্তী জ্যা হইতে বৃহত্তর।

বিপরীত ক্রমে, ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর জ্যা কেন্দ্রের নিকটতর।

[In a circle the chord which is nearer to the centre is greater than one more remote.

Conversely, the greater chord is nearer to the centre than the less.]

মনে কর, O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD উহার দুইটি জ্যা O বিন্দু হইতে AB এবং CD এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

যদি (১) $OE < OF$, তবে $AB > CD$,

বিপরীত ক্রমে, যদি (২) $AB > CD$, তবে $OE < OF$।

প্রমাণ। OA এবং OC সংযুক্ত কর

OE, AB এর উপর লম্ব।

$\therefore \quad AE = \frac{1}{2} AB$,

অনুরূপ $CF = \frac{1}{2} CD$।

এখন OEA এবং OFC সমকোণ,

$\therefore \quad OE^2 + AE^2 = OA^2 = OC^2 = OF^2 + CF^2$।

(১) কিন্তু যদি $OE < OF$, $\therefore \quad OE^2 < OF^2$,

$\therefore \quad AE^2 > CF^2$,

$\therefore \quad AE > CF$,

$\therefore \quad AB > CD$।

(২) আবার, যদি $AB > CD$,

$\therefore \quad AE > CF$,

$\therefore \quad AE^2 > CF^2$ ।

কিন্তু $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$,

$\therefore \quad OE^2 < CF^2$ ।

$\therefore \quad OE < CF$ । ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

অনুশীলনী

১। বৃত্তের কোন জ্যাএর মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত অপর একটি জ্যা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর।

২। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ক্ষুদ্রতর জ্যাটি অঙ্কিত কর।

[Through any point within a circle draw the least possible chord.]

[ক. প্র.

৩। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুইটির অধিক সমান সমান জ্যা অঙ্কিত করা যায় না।

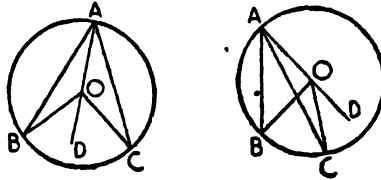
৪। কোন বৃত্তের পরিধিস্থ একটি বিন্দু হইতে যত জ্যা টানা যায় তন্মধ্যে যেটি কেন্দ্র ভেদ করিয়া যায় উহাই বৃহত্তম, এবং অপরগুলির মধ্যে যাহার সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ বৃহত্তর সেইটিই বৃহত্তর।

৫। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে যত সরল রেখা পরিধি পর্যন্ত টানা যায় তন্মধ্যে যেটি কেন্দ্র ভেদ করে সেইটিই বৃহত্তম এবং উহা অপর দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন ব্যাসের অপর অংশটি ক্ষুদ্রতম। অপরগুলির মধ্যে যাহার সম্মুখস্থ কেন্দ্রীয় কোণ বৃহত্তর তাহাই বৃহত্তর।

৬। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, একটি ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত পরিধিদ্বয়দ্বারা সীমাবদ্ধ সমস্ত সরলরেখাগুলির মধ্যে যেটি কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক-রেখার সমান্তরাল, উহাই বৃহত্তম।

উপপাদ্য ৩৪

কোন বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণটি পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

[The angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc.]

মনে কর, O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং BC চাপের উপর দণ্ডায়মান BOC কেন্দ্রস্থ কোণ, আর BAC একটি পরিধিস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle BOC = 2\angle BAC$ ।

AO সংযুক্ত কর এবং উহা D পর্যন্ত বর্ধিত কর।

OAB ত্রিভুজের,

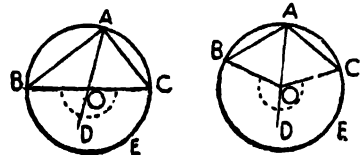
$OB = OA$, $\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA$.

$\therefore$ বহিঃকোণ BOD = অন্তঃকোণ OAB + OBA = $2\angle OAB$;

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, বহিঃকোণ COD = $2\angle OAC$;

প্রথম চিত্রে উহাদের সমষ্টি এবং দ্বিতীয় চিত্রে উহাদের অন্তর

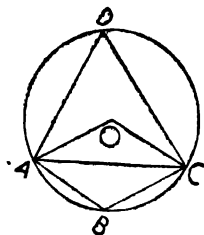
$\angle BOD = 2\angle BAC$ । ই উ. বি.

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট চাপটি বৃত্তার্ধ হইলে কেন্দ্রস্থ কোণটি সরল কোণ = দুই সমকোণ, এবং পরিধিস্থ কোণ = এক সমকোণ। কিন্তু চাপটি অধিচাপ (Major Arc) হইলে, উহা অর্ধপরিধি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $\angle$ BOC একটি প্রবৃদ্ধ কোণ (reflex angle) হইবে।

সংজ্ঞা। কোন ক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুসমূহ একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হইলে ঐ ক্ষেত্রটিকে বৃত্তের **অন্তর্লিখিত ক্ষেত্র** (figure inscribed in a circle) বলা হয়।

অনুশীলনী

১। O, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ; প্রমাণ কর যে, $\angle OBC + \angle BAC =$ এক সমকোণ।

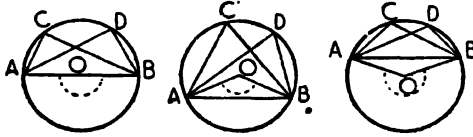
২। ABC বৃত্তের AB এবং CD জ্যা দুইটি E বিন্দুতে ছেদ করিল। বৃত্তের কেন্দ্র O হইলে, প্রমাণ কর যে, $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle AEC$।

৩। একটি জ্যা দ্বারা একটি বৃত্তকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ অপর বৃত্তাংশস্থিত কোণের দ্বিগুণ হয়।

সঙ্কেত। OA একটি ব্যাসার্ধ টান, OAএর সমান AB জ্যা অঙ্কিত কর এবং OC ব্যাসার্ধ, ABএর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত কর।

∴ ABCO একটি সামন্তরিক। AC সংযুক্ত কর এবং Bএর বিপরীত দিকে D বিন্দু লইয়া DA, DC সংযুক্ত কর। ACই অভীষ্ট জ্যা, কারণ $\angle ABC = \angle AOC = 2\angle ADC$।

উপপাদ্য ৩৫

একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলি পরস্পর সমান।

[Angles in the same segment of a circle are equal.]

মনে কর, ABC বৃত্তের AB একটি জ্যা এবং O উহার কেন্দ্র। ACB এবং ADB একই বৃত্তাংশস্থিত কোণদ্বয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ACB = \angle ADB$।

প্রমাণ। OA, OB সংযুক্ত কর।

একই চাপ ABএর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ AOB = পরিধিস্থ কোণ ACBএর দ্বিগুণ।

অনুরূপ কেন্দ্রস্থ কোণ AOB = পরিধিস্থ কোণ ADBএর দ্বিগুণ,

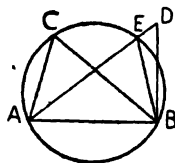
∴ $\angle ACB = \angle ADB$। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। ১ম চিত্রে বৃত্তাংশটি বৃত্তার্ধের সমান, ২য় চিত্রে উহা বৃত্তার্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং ৩য় চিত্রে উহা বৃত্তার্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও এই অবস্থায় $\angle AOB$ প্রবৃদ্ধ কোণ।

উপপাদ্য ৩৬

(উপপাদ্য ৩৫এর বিপরীত)

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক রেখা উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত অপর দুই বিন্দুতে সমান সমান সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করিলে, ঐ চারিটি বিন্দু একবৃত্তস্থ হইবে।

[If the line joining two given points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle (or are concyclic.)]

মনে কর, A এবং B নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা AB, উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত C এবং D বিন্দুতে সমান সমান ACB এবং ADB কোণদ্বয় উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, C এবং D বিন্দু-চতুষ্টয় একবৃত্তস্থ হইবে।

অঙ্কন। A, B এবং C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

যদি এই বৃত্ত D বিন্দু দিয়া না যায়, মনে কর বৃত্তটি AD অথবা বর্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। একই বৃত্তাংশস্থিত $\angle ACB = \angle AEB$, [উপ ৩৫

কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$, [কল্পনা

$\therefore \angle AEB = \angle ADB$,

অর্থাৎ বহিঃকোণ দূরবর্তী অন্তঃকোণের সমান ;

ইহা অসম্ভব।

সুতরাং A, B ও C বিন্দুত্রয় দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়াও যাইবে।

অর্থাৎ A, B, C ও D বিন্দু একবৃত্তস্থ হইবে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। একই ভূমির উপর উহার একই পার্শ্বে অঙ্কিত সমান সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির শীর্ষসমূহ এক বৃত্তাংশস্থিত হইবে, এবং নির্দিষ্ট ভূমি ঐ বৃত্তাংশের জ্যা হইবে।

[The vertices of all triangles standing on a given base and having equal vertical angles lie on the arc of a segment of a circle having the given base as its chord.]

দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য ৩৬এর বিকল্প নির্বচন নিম্নে দেওয়া হইল—

একই নির্দিষ্ট ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান সমান কোণের শীর্ষসমূহ একই বৃত্তাংশে অবস্থিত যাহারা জ্যা নির্দিষ্ট ভূমি হইবে।

[Equal angles standing on the same base and on tha same side of it have their vertices on an arc of a circle of which the given base is the chord].

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, উহার শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ক. প্র.

২। কোন্ বৃত্তের AB এবং CD জ্যা দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AOC এবং DOB ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ-কোণ।

৩। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা কয়েকটি বিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিলে ঐ বিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে। [পা. প্র.

৪। AB কোন বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট চাপ, এবং P পরিধির উপর একটি বিন্দু, Pএর যে-কোন অবস্থানেই $\angle ABP + \angle PAB =$ ধ্রুবক (constant)।

৫। দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু P এবং Q হইলে এবং যে-কোন সরল রেখা AB, P দিয়া অঙ্কিত ও পরিধিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, $\angle AQB$ ধ্রুবক হইবে।

৬। একটি নির্দিষ্ট চাপ ABএর উপর C যে-কোন একটি বিন্দু, CAB এবং CBA কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিলে, O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ক. প্র.

৭। দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু P এবং Q হইলে, এবং P বিন্দু দিয়া পরিধিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ APB এবং CPD রেখাদ্বয় টানিলে, $\angle AQC = \angle BQD$।

৮। বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$, $\angle CBA$ এবং $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিকে যথাক্রমে P, Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, QR, APএর লম্ব। [বো. প্র.

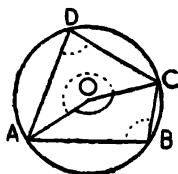
৯। ত্রিভুজের ভূমি এবং ভূমিস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, উহার শীর্ষের সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

১০। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের জ্যা অঙ্কিত করিলে, ঐ জ্যাএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। নির্দিষ্ট বিন্দুটি পরিধির অভ্যন্তরে, উপরে কিংবা বাহিরে থাকিলে সঞ্চারপথের পার্থক্য নির্দেশ কর।

১১। ABC ত্রিভুজের B এবং C হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু D এবং E হইলে, প্রমাণ কর যে, B, C, D এবং E একবৃত্তস্থ হইবে।

উপপাদ্য ৩৭

কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি চতুর্ভুজের যে-কোন বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

[The opposite angles of a quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজটি ABC বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইয়াছে, এবং O এই বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $\angle ADC + \angle ABC =$ দুই সমকোণ,

(২) $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

প্রমাণ। OA এবং OC সংযুক্ত কর।

একই চাপের উপর দণ্ডায়মান

পরিধিস্থ $\angle ADC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$। [উপ ৩৪

আবার একই চাপের উপর দণ্ডায়মান

পরিধিস্থ $\angle ABC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$।

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$

$= \frac{1}{2} \times$ চারিসমকোণ $=$ দুইসমকোণ।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

AC এবং BD সংযুক্ত কর।

একই বৃত্তাংশস্থিত $\angle BAC = \angle BDC$, [উপ ৩৫

অনুরূপ $\angle CAD = CBD$,

$\therefore \angle BAD + \angle BCD$

$= \angle BAC + \angle CAD + \angle BCD = \angle BDC + \angle CBD + \angle BCD$

$=$ BCD ত্রিভুজের কোণত্রয়

$=$ দুই সমকোণ। [উপ ১৬

ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে-কোন বাহু বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণটি ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণের সমান হইবে। [ক. প্র.

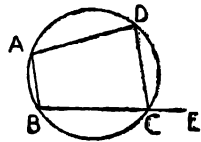
(If one side of a cyclic quadrilateral is produced, the exterior angle so formed is equal to the interior opposite angle of the quadrilateral.)

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BC বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠DCE = ∠BAD।

∠BCD, ∠DCEএর সম্পূরক।

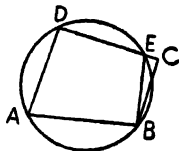
আবার ∠BCD, ∠BADএর সম্পূরক, [উপ ৩৭

∴ ∠DCE = ∠BAD।

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৩৮

(উপপাদ্য ৩৭এর বিপরীত)

যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ-যুগল পরস্পর সম্পূরক হয়, তবে উহার শীর্ষবিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে।

[If a pair of opposite angles of a quadrilateral be supplementary, then its vertices are concyclic.]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় A এবং C পরস্পর সম্পূরক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহার শীর্ষবিন্দু A, B, C এবং D একবৃত্তস্থ।

অঙ্কন। D, A, B বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; এই বৃত্ত যদি C বিন্দু দিয়া না যায়, মনে কর উহা DC অথবা বর্ধিত DCকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। BE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। অতএব ABED একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠A + ∠E = দুই সমকোণ, [উপ ৩৭

কিন্তু $\angle A + \angle C =$ দুই সমকোণ, (কল্পনা)

$\therefore \quad \angle C = \angle E,$

অর্থাৎ বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান, যাহা অসম্ভব।

অতএব D,A,B দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত, অবশ্যই C দিয়া যাইবে। সুতরাং A, B, C এবং D একবৃত্তস্থ। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে, যদি উৎপন্ন বহিঃকোণ, চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হয়, তবে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

ABCD চতুর্ভুজের BC বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\angle DCE = \angle BAD$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ। $\angle BCD + \angle DCE =$ দুই সমকোণ,

$\therefore \quad \angle BCD + \angle BAD =$ দুই সমকোণ ;

$\therefore$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। বৃত্তের অন্তর্লিখিত সামন্তরিক, আয়তক্ষেত্র হইবে।

(The parallelogram about which a circle can be described must be a rectangle.) [ক. প্র.

২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর সমান্তরাল DE সরল রেখা AB এবং AC বাহুদ্বয়কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিলে, B, C, D এবং E বিন্দুগুলি বৃত্তস্থ হইবে। [এ. প্র.

৩। ABCD সামন্তরিকের A এবং B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন বৃত্ত AD এবং BCকে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিলে E, F, C এবং D একবৃত্তস্থ হইবে। [বো. প্র.

৪। প্রমাণ কর যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে-কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত কোণের বহিঃদ্বিখণ্ডক বৃত্তের পরিধির উপর ছেদ করে। [ক. প্র.

৫। কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বৃত্তাংশস্থিত কোণত্রয়ের সমষ্টি চারি-সমকোণ।

৬। যদি দুইটি বৃত্তের সমান সমান জ্যা উভয় পরিধিতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্তদ্বয় সমান হইবে।

৭। কোন চতুর্ভুজের কোণগুলির দ্বিখণ্ডক যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন করিবে তাহা বৃত্তস্থ হইবে, প্রমাণ কর। [ক. প্র.

৮। ABC ত্রিভুজের B এবং C কোণদ্বয়ের অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় D বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করিলে B, D, C, E বিন্দুচতুষ্টয় একবৃত্তস্থ হইবে।

৯। কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির উপর বহির্দিকে তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহাদের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, পরিবৃত্ত-গুলি একই বিন্দুতে ছেদ করিবে। [ক. প্র.

১০। দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অপরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল। [ক. প্র.

১১। কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ABCDএর ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডক BE পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে DE, ADE কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

১২। ABC ত্রিভুজে, X, Y এবং Z যথাক্রমে BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু এবং AD, A হইতে BCএর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে X, Y, Z এবং D একবৃত্তস্থ হইবে। [ক. প্র., ঢা. বো.

XZ, ZY এবং YD সংযুক্ত কর। ADC সমকোণী ত্রিভুজের Y অতিভুজের মধ্যবিন্দু, $\therefore DY = AY = CY$,

$\therefore \angle YDC = \angle YCD$।

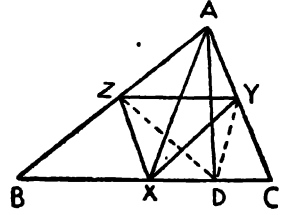
আবার X এবং Z, BC এবং ABএর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ XZ, ACএর সমান্তরাল; এইরূপে YZ, BCএর সমান্তরাল।

$\therefore$ XCYZ একটি সামন্তরিক।

$\therefore \angle XZY = \angle YCX = \angle YCD$।

$\therefore \angle YDC = \angle XZY$। $\therefore \angle YDX + \angle XZY = \angle YDX + \angle YDC$
= দুই সমকোণ

$\therefore$ X, Y, Z, D বিন্দুচতুষ্টয় একবৃত্তস্থ। (উপ ৩৮)

বিকল্প প্রমাণ

XZ, XY, DY, DZ, YZ সংযুক্ত কর। AZXY একটি সামন্তরিক,

$\therefore \angle YXZ = \angle ZAY$।

ADC সমকোণী ত্রিভুজে Y, AC অতিভুজের মধ্যবিন্দু,

$\therefore DY = AY$, $\therefore \angle ADY = \angle DAY$।

আবার ADB সমকোণী ত্রিভুজের, Z, AB অতিভুজের মধ্যবিন্দু,

$\therefore DZ = AZ$, $\therefore \angle ZDA = \angle DAZ$।

$\therefore$ সমগ্র $\angle ZDY$ = সমগ্র $\angle ZAY$,

$\therefore \angle YXZ = \angle YDZ$, কিন্তু ইহারা একই ভূমি YZএর উপর এবং উহার একই দিকে অবস্থিত।

সুতরাং X, Y, Z এবং D একবৃত্তস্থ হইবে। (উপ ৩৬)

১৩। ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুত্রয় একবৃত্তস্থ হইবে।

(The middle points of the sides of a triangle and the feet of the perpendiculars drawn from the vertices to the opposite sides are concyclic.) [ক. প্র.

সঙ্কেত—E এবং F অপর দুইটি লম্বপাদ হইলে, উপরি-উক্ত দৃষ্টান্ত হইতে প্রমাণ করা যায় যে X, Y, Z ও E এবং X, Y, Z ও F একবৃত্তস্থ। সুতরাং X, Y, Z দিয়া অঙ্কিত বৃত্তই D, E এবং F দিয়াও যাইবে।

১৪। ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু O হইলে, ∠BOC + ∠BAC = দুই সমকোণ [ক. প্র.

উপপাদ্য ৩৯

(১) অর্ধ বৃত্তস্থ কোণটি সমকোণ হইবে।

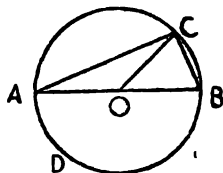
(২) (ক) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং

(খ) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ হইবে।

[1. The angle in a semi-circle is a right angle. 2. (a) The angle in a segment greater than a semi-circle is less than a right angle, and (b) the angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.]

(১) মনে কর, ACBD বৃত্তের O কেন্দ্র, AB একটি ব্যাস এবং C পরিধিস্থ যে-কোন একটি বিন্দু। AC, BC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

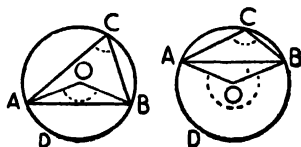
∠ACB = এক সমকোণ।

ADB চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOB [উপ ৩৪

কিন্তু ∠AOB = সরলকোণ = দুই সমকোণ।

∴ ∠ACB = এক সমকোণ। ই. উ. বি.

(২) মনে কর, ACBD বৃত্তের O কেন্দ্র। AB একটি জ্যা এবং C পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু।

AC, CB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(ক) যদি ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে $\angle ACB =$ একটি সূক্ষ্মকোণ। (১ম চিত্র)

(খ) যদি ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে $\angle ACB =$ একটি স্থূলকোণ। (২য় চিত্র)

প্রমাণ। AO, BO সংযুক্ত কর।

উভয় ক্ষেত্রে, পরিধিস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ [উপ ৩৪

(ক) ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর,

$\therefore$ ADB একটি উপচাপ ;

$\therefore$ $\angle AOB$ দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ $\angle ACB$ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সুতরাং $\angle ACB$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

(খ) ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

$\therefore$ ADB একটি অধিচাপ,

$\therefore$ $\angle AOB$ প্রবৃদ্ধ কোণ অর্থাৎ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

$\therefore$ $\angle ACB$ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর,

সুতরাং $\angle ACB$ একটি স্থূলকোণ। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। কোন বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমকোণ হইলে, বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত হইবে।

২। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ঐ বৃত্ত অতিভুজের বিপরীত শীর্ষ দিয়া যাইবে। ক. প্র.

৩। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে বৃত্তদ্বয় তৃতীয় বাহুর, অথবা উহার বর্ধিত অংশের, উপর ছেদ করিবে।

৪। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৫। দুইটি বৃত্ত P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, যদি P বিন্দু হইতে PA ও PB ব্যাসদ্বয় অঙ্কিত করা যায়, তবে AQ ও BQ একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে।

৬। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু X ; BE, CF যদি যথাক্রমে AC এবং AB এর উপর লম্ব হয়, EF এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক X দিয়া যাইবে ; এবং ABC ও AEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণ হইবে।

৭। ABC ত্রিভুজে AD, BC এর উপর লম্ব এবং AE ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস হইলে, ABD এবং AEC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণ হইবে ; আবার ACD এবং AEB ত্রিভুজদ্বয়ও সদৃশকোণ হইবে।

৮। P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন বৃত্তের জ্যাগুলির মধ্য-বিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর। বিন্দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে, পরিধির উপর অথবা বৃত্তের বাহিরে থাকিলে, কি পার্থক্য হইবে প্রদর্শন কর।

৯। একটি রম্বসের বাহুচতুষ্টয়কে ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা পরস্পর কর্ণদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুতে ছেদ করিবে।

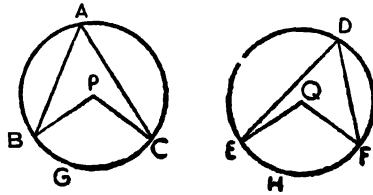
১০। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখা লম্বভাবে ছেদ করিল ; ঐ ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১১। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি অনির্দিষ্ট (চল, Variable) সরল রেখার উপর অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

১২। বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তটিকে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিলে EF, বৃত্তটির একটি ব্যাস হইবে।

উপপাদ্য ৪০

সমান সমান (বা একই) বৃত্তের যে সমুদয় চাপ কেন্দ্রে বা পরিধিতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle) arcs which subtend equal angles, either at the centres or at the circumferences are equal.]

মনে কর, ABC এবং DEF সমান বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রস্থ ∠BPC এবং ∠EQF পরস্পর সমান। অতএব পরিধিস্থ ∠BAC এবং ∠EDF পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BGC চাপ = EHF চাপ।

মনে কর, P এবং Q যথাক্রমে ABC এবং DEF বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

প্রমাণ। ABC বৃত্ত DEF বৃত্তের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন P কেন্দ্র Q কেন্দ্রের উপর পতিত হয় এবং PB ব্যাসার্ধ QE ব্যাসার্ধের উপর পতিত হয়।

কিন্তু সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া PB = QE,

∴ B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

আবার ∠BPC = ∠EQF,

∴ PC, QFএর উপর পতিত হইবে।

কিন্তু PC ব্যাসার্ধ = QF ব্যাসার্ধ,

∴ C বিন্দু F বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে। এবং বৃত্তদ্বয়ের পরিধিও সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

সুতরাং BGC চাপ EHF চাপের সহিত মিলিয়া যাইবে।

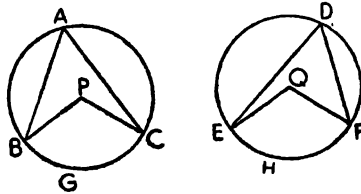
∴ BGC চাপ = EHF চাপ। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই প্রমাণ একই বৃত্তের বিভিন্ন চাপের উপর অবস্থিত সমান কোণের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। কারণ একই বৃত্তের দুইটি চাপকে দুইটি সমান বৃত্তস্থ মনে করা যায়।

উপপাদ্য ৪১

(উপ ৪০এর বিপরীত)

সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে) সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle) angles, whether at the centres or at the circumferences, standing on equal arcs, are equal.]

মনে কর, ABC এবং DEF সমান সমান বৃত্ত দুইটির BGC এবং EHF চাপ দুইটি পরস্পর সমান। এবং P ও Q বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, কেন্দ্রস্থ ∠BPC = কেন্দ্রস্থ ∠EQF

এবং পরিধিস্থ ∠BAC = পরিধিস্থ ∠EDF।

প্রমাণ। ABC বৃত্তকে DEF বৃত্তের উপর এরূপে স্থাপন কর যেন P কেন্দ্র Q কেন্দ্রের উপর পতিত হয় এবং PB ব্যাসার্ধ QE ব্যাসার্ধের উপর পড়ে।

কিন্তু সমান সমান বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ সমান।

∴ B বিন্দু E বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে, এবং পরিধিদ্বয়ও পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

আবার BGC চাপ = EHF চাপ,

∴ C বিন্দু F বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ PC, QF এর সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ $\angle BPC = \angle EQF$.

কিন্তু পরিধিস্থ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle BPC$,

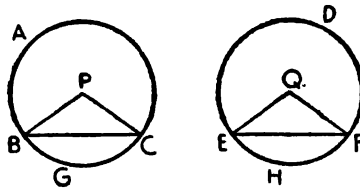
এবং পরিধিস্থ $\angle EDF = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle EQF$,

∴ $\angle BAC = \angle EDF$. ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই প্রমাণ একই বৃত্তের পক্ষেও প্রযোজ্য।

উপপাদ্য ৪২

সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে) সমান সমান জ্যা যে সকল চাপ ছিন্ন করে তাহারা পরস্পর সমান; অধিচাপ অধিচাপের এবং উপচাপ উপচাপের সমান হইবে।

[In equal circles (or in the same circle) arcs cut off by equal chords are equal, the major arc being equal to the major arc, and the minor to the minor.]

মনে কর, ABC এবং DEF সমান সমান বৃত্তদ্বয়ের যথাক্রমে P এবং Q কেন্দ্র। এবং জ্যা BC = জ্যা EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, অধিচাপ BAC = অধিচাপ EDF,

এবং উপচাপ BGC = উপচাপ EHF।

প্রমাণ। BP, PC, EQ ও QF সংযুক্ত কর।

PBC ও QEF ত্রিভুজদ্বয়ের

PB = QE, } সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ
PC = QF, }

এবং BC = EF,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

∴ ∠BPC = ∠EQF,

সুতরাং *BGC চাপ = EHF চাপ [উপ ৪০

এবং ইহারা উপচাপ।

কিন্তু সমগ্র পরিধি ABGC = সমগ্র পরিধি DEHF,

∴ অবশিষ্ট চাপ BAC = অবশিষ্ট চাপ EDF,

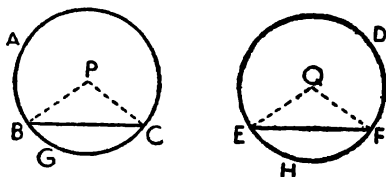
এবং ইহারা অধিচাপ। ই. উ. বি.

* দ্রষ্টব্য। এই প্রমাণ একই বৃত্তের পক্ষেও প্রযোজ্য।

উপপাদ্য ৪৩

(উপ ৪২এর বিপরীত)

সমান সমান বৃত্তে (বা একই বৃত্তে), যে সকল জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle) chords which cut off equal arcs are equal.]

মনে কর, ABC এবং DEF সমান সমান বৃত্তদ্বয়ের BGC এবং EHF চাপ দুইটি পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

জ্যা BC = জ্যা EF ।

মনে কর, P এবং Q বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র ।

প্রমাণ। PB, PC, QE ও QF সংযুক্ত কর।

যেহেতু চাপ BGC = চাপ EHF

∴ $\angle BPC = \angle EQF$ । [উপ ৪১

এখন, PBC এবং QEF ত্রিভুজদ্বয়ের

PB = QE,
PC = QF, } সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ

এবং $\angle BPC = \angle EQF$, (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ চাপ BC = চাপ EF । ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই সিদ্ধান্ত একই বৃত্ত সম্বন্ধেও প্রযোজ্য।

অনুশীলনী

১। সমান সমান বৃত্তে যে সকল বৃত্তকলার কোণগুলি সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

২। সমান সমান বৃত্তে যে সকল বৃত্তকলার চাপগুলি সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

৩। সমান সমান বৃত্তে, যে সকল বৃত্তাংশের চাপগুলি সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

৪। সমান সমান বৃত্তে যে সকল বৃত্তাংশের জ্যাগুলি সমান এবং উভয়েই বৃত্তার্ধ হইতে বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহারা পরস্পর সমান।

৫। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবর্তী চাপদ্বয় পরস্পর সমান।

৬। বৃত্তে অন্তর্লিখিত যে-কোন ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহু দুইটি পরস্পর সমান। এবং উহার কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান।

৭। দুইটি সমান সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে-কোন সরল রেখা পরিধিদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে PB = QB। [ক. প্র.

৮। দুইটি সমান সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত PQ সরল রেখা পরিধিদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে PQ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৯। ABC ত্রিভুজের ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল, এবং CI রেখা ∠C কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া AD কে I বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, DB = DC = DI. [বো. প্র.

১০। কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান হইলে উহার কর্ণদ্বয়ও সমান হইবে।

১১। কোন বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা, পরিধির উপর P যে-কোন একটি বিন্দু লইলে, ∠APB এর সমদ্বিখণ্ডক একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে। [ক. প্র., ঢা. বো.

(AB is a fixed chord of a circle and P, any point on the circumference, prove that the bisector of the ∠APB passes through a fixed point).

১২। কোন বৃত্তাংশস্থ কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক উহার চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

১৩। দুইটি জ্যা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিলে উৎপন্ন চারিটি চাপের যে-কোন দুইটি বিপরীত চাপের সমষ্টি পরিধির অর্ধের সমান হইবে।

১৪। কোন বৃত্তে AB এবং AC জ্যাদ্বয়দ্বারা ছিন্ন উপচাপদ্বয়ের মধ্য-বিন্দু P ও Q হইলে, PQ সরল রেখা যদি AB কে D এবং AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে AD = AE।

১৫। দুইটি বৃত্ত A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল। উহার একটির পরিধির যে-কোন বিন্দু P হইতে অঙ্কিত PAQ এবং PBR রেখাদ্বয় অপর

পরিধিকে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করিলে, QR চাপটি P বিন্দুর যে কোন অবস্থানেই সমান থাকিবে। [ক. প্র.

১৬। দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া PAQ এবং MAN সরলরেখা টানিলে, প্রমাণ কর জ্যা PM = জ্যা PN।

১৭। দুইটি সমান বৃত্ত A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল। A এবং B বিন্দু দিয়া CD এবং EF দুইটি পরিধিদ্বারা সীমাবদ্ধ সমান্তরাল রেখা অঙ্কিত করিলে, প্রমাণ কর যে জ্যা CE = জ্যা DF।

১৮। ABCD একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং AB ও CD সম্মুখীন বাহুদ্বয় বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে এবং CB ও DA বাহুদ্বয় F বিন্দুতে মিলিত হইল। যদি EBC এবং FAB বৃত্তদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে E, G, F বিন্দুত্রয় একই সরল রেখার অন্তর্গত। [ক. প্র., ঢা. বো.

১৯। নির্দিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত সমান শিরঃকোণ-বিশিষ্ট যাবতীয় ত্রিভুজের শিরঃকোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকগুলি কোন-এক নিদিষ্ট বিন্দুগামী।

[ক. প্র.

২০। বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখা পরিধিকে D, E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, DEF ত্রিভুজের কোণ তিনটি যথাক্রমে $90° - \frac{A}{2}$, $90° - \frac{B}{2}$ এবং $90° - \frac{C}{2}$ এর সমান।

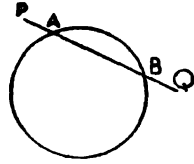
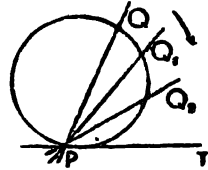
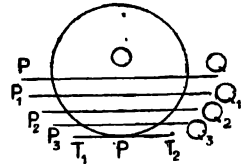
২১। ABC বৃত্তে অন্তলিখিত একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ইহার ভূমি-কোণ B এবং C এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরিধিকে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে AEBCD ক্ষেত্রটির অন্ততঃ চারিটি বাহু পরস্পর সমান হইবে।

ত্রিভুজের কোণগুলির কিরূপ সম্বন্ধ হইলে ক্ষেত্রটি সমবাহু হইবে?

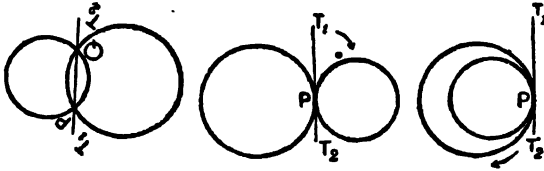
২২। ABC একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। BC চাপের মধ্যবিন্দু D দিয়া DE ব্যাস অঙ্কিত হইল, প্রমাণ কর যে, EDA কোণ B এবং C কোণের অন্তরের অর্ধেক হইবে।

বৃত্তের স্পর্শক

সংজ্ঞা

১। যে অসীম সরল রেখা বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাকে বৃত্তের **ছেদক** (Secant) বলে। চিত্রে PABQ একটি ছেদক। সুতরাং কোন একটি জ্যাকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উহাও একটি ছেদক হইবে।

২। মনে কর, একটি ছেদক PQ বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন P বিন্দু স্থির রাখিয়া PQ কে এইরূপ ভাবে ঘুরাইতে থাক যেন Q ক্রমশঃ P এর দিকে অগ্রসর হইতে থাকে এবং অবশেষে Q, Pএর সহিত মিলিত হয়। Q যখন Pএর সহিত মিলিয়া যায় তখন উহার অবস্থান PT হয়, এবং বৃত্তটি ও ছেদকের একটিমাত্র সাধারণ বিন্দু থাকিবে। এই অবস্থায় ছেদকটিকে বৃত্তের **স্পর্শক** (Tangent) বলা হয়, এবং সাধারণ বিন্দুটিকে **স্পর্শবিন্দু** (Point of contact) বলে। এই চিত্রে PT স্পর্শক এবং P স্পর্শবিন্দু।

আবার, যদি PQ ছেদককে সমান্তরালভাবে কেন্দ্র O হইতে সরাইয়া লওয়া যায়, তাহা হইলে P এবং Q ক্রমশঃ পরস্পর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে এবং অবশেষে উহারা P বিন্দুতে মিলিয়া যাইবে অর্থাৎ উহাদের সমাপতন হইবে।

তখন PQএর অবস্থান T_1PT_2 হইবে এবং উহা বৃত্তটিকে মাত্র P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অর্থাৎ, T_1PT_2 স্পর্শক হইবে।

অতএব যদি কোন সরলরেখা একটি বৃত্তের সহিত দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে উহাকে বৃত্তটির **স্পর্শক** বলে। এবং ঐ মিলিত বিন্দুকে **স্পর্শবিন্দু** বলে।

৩। মনে কর, দুইটি বৃত্ত পরস্পর P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ সংযুক্ত করিয়া উভয়দিকে বর্ধিত করা হইল।

এখন একটি বৃত্ত স্থির রাখিয়া অপরটি ডানদিকে কিংবা বাম দিকে ঘুরাইতে থাকিলে P এবং Q ক্রমশঃ নিকটবর্তী হইতে থাকিবে। অবশেষে উহারা মিলিত হইবে। তখন T^1 PT^2 উভয় বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং বৃত্ত দুইটিও পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অতএব দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে তাহাদের একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু থাকে। এই স্থলে বৃত্ত দুইটি একবিন্দুতে মিলিত হয়, কিন্তু পরস্পরকে ছেদ করে না। যদি একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের সম্পূর্ণ ভিতরে থাকিয়া তাহাকে স্পর্শ করে তবে উহাদের **অন্তঃস্পর্শ** (Internal Contact) হইয়াছে বলা হয়, এবং একটি অপরটিকে **অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ** করিয়াছে (touch internally) বলা হয়।

যদি একটি বৃত্ত অপরটিকে সম্পূর্ণ বাহিরে থাকিয়া স্পর্শ করে, তবে উহাদের বহিঃস্পর্শ (External Contact) হইয়াছে বলা হয়, এবং একটি অপরটিকে **বহিঃস্থভাবে স্পর্শ** করিয়াছে (touch externally) বলা হয়।

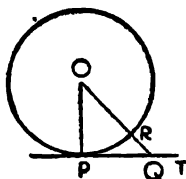
আমরা উপরের ২য় এবং ৩য় চিত্রে দেখিয়াছি যে, **দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকিবে।**

উপপাদ্য ৪৪

বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধের লম্ব হইবে।

[The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact,]

মনে কর, O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং P বিন্দুতে PT স্পর্শক। OP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP, PTএর উপর লম্ব।

অঙ্কন। PTএর উপর, P ব্যতীত যে-কোন বিন্দু Q লও, এবং OQ সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। স্পর্শক PT বৃত্তকে ছেদ করে না, মাত্র Pবিন্দুতে উহার পরিধিকে স্পর্শ করে। সুতরাং উহার আর কোন বিন্দুই বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকিতে পারে না। অতএব Q বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত এবং OQ পরিধিকে কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

∴ OQ > ব্যাসার্ধ OP।

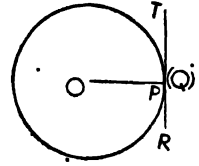
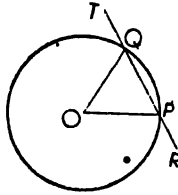
এইরূপ PTএর উপর P ভিন্ন Qএর যে-কোন অবস্থানেই OQ > OP।

∴ O হইতে PT পর্যন্ত যত সরলরেখা টানা যায়, তাহাদের মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম।

∴ OP, PTএর উপর লম্ব। ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

মনে কর, O কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর P বিন্দু অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক OPএর লম্ব হইবে।

মনে কর, P দিয়া অঙ্কিত RPQT ছেদকটি বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। OP, OQ সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। OP = OQ,

∴ ∠OQP = ∠OPQ।

∴ উহাদের সম্পূরক বলিয়া বহিঃস্থ ∠OQT = বহিঃস্থ ∠OPR। P বিন্দুটি বৃত্তের উপর স্থির রাখিয়া PQ ছেদককে এইরূপে ঘুরান হউক যেন Q বিন্দুটি ক্রমশঃ Pএর নিকটবর্তী হয়। Qএর প্রত্যেক অবস্থানেই ∠OQT = ∠OPR। অবশেষে PQএর চরম অবস্থানে যখন Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত এবং OQ ব্যাসার্ধ OP ব্যাসার্ধের সহিত মিলিয়া যাইবে, ছেদক PT (২য় চিত্র) বৃত্তের স্পর্শকে পরিণত হইবে। এই অবস্থায় ∠OQT এবং ∠OPR সমান কোণদ্বয় সন্নিহিত কোণ হইবে। অতএব উহারা প্রত্যেকেই সমকোণ হইবে।

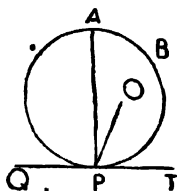
∴ OP, PTএর উপর লম্ব। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এইরূপ প্রমাণের প্রণালীর নাম চরম পরিণতির প্রণালী (Method of Limits)।

অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তের পরিধির উপর কোন বিন্দুতে বৃত্তের একটিমাত্র স্পর্শক টানা যাইতে পারে। কারণ, P বিন্দু হইতে OP ব্যাসার্ধের কেবল একটি লম্বই অঙ্কিত হইতে পারে।

উপপাদ্য ৪৫

বৃত্তের কোন স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত উহার উপর লম্ব বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া যায়।

[The perpendicular drawn to the tangent of a circle at the point of contact passes through the centre.]

মনে কর, ABP বৃত্তের P বিন্দুতে QPT একটি স্পর্শক এবং PA উহার লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PA, বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া যাইবে।

প্রমাণ। PA যদি কেন্দ্র ভেদ করিয়া না যায়,

মনে কর, বৃত্তের কেন্দ্র PAর বাহিরে কোন বিন্দু O তে অবস্থিত।

OP সংযুক্ত কর।

এখন PT স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু P হইতে PO ব্যাসার্ধ অঙ্কিত হইয়াছে।

∴ OP, PTএর লম্ব।

∴ OPT = এক সমকোণ।

কিন্তু কল্পনানুসারে AP, PTএর লম্ব।

∴ $\angle$APT = এক সমকোণ;

∴ $\angle APT = \angle OPT$,

সমগ্র কোণটি তাহার অংশের সমান, ইহা অসম্ভব।

∴ কেন্দ্র O, APএর বাহিরে থাকিতে পারে না।

অর্থাৎ AP কেন্দ্র দিয়া যাইবে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন বৃত্তের যে ব্যাসার্ধ স্পর্শকের লম্ব উহা স্পর্শ-বিন্দুগামী। কারণ O হইতে PT পর্যন্ত একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত হইতে পারে।

অনুশীলনী

১। বৃত্তের কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটী সমান্তরাল হইবে।

২। কোন বৃত্তের দুইটী সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা একটী ব্যাস হইবে।

৩। ব্যাসের কোন প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলি উক্ত ব্যাসদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [ক. প্র.

৪। বৃত্তের কোন স্পর্শকের সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত যাবতীয় জ্যাগুলি স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত ব্যসদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

৫। 1″ ও 1·5″ ব্যাসার্ধের দুইটী এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃহত্তর বৃত্তের কতকগুলি জ্যা এরূপভাবে অঙ্কিত কর যেন উহারা ক্ষুদ্রতর বৃত্তের স্পর্শক হয়। মাপিয়া দেখাও এই জ্যাগুলি পরস্পর সমান। এবং স্পর্শবিন্দুতে প্রত্যেকেই সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৬। দুইটী এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটীর যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতরটিকে স্পর্শ করে, তাহারা পরস্পর সমান। [ক. প্র.

৭। দুইটী এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তর বৃত্তের কোন জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে স্পর্শ করিলে উহা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [ক. প্র.

৮। কোন বৃত্তের PQ একটী ব্যাস এবং QR একটি জ্যা। QO, PQR কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরিধিকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। OT বর্ধিত QRএর লম্ব টানিলে OT বৃত্তটীর স্পর্শক হইবে।

৯। ABC বৃত্তাংশের কোণ 45° হইলে, প্রমাণ কর A এবং C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। [এ. প.

১০। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া কিরূপে একটি বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে? এইরূপ কয়টি স্পর্শক সম্ভব? [ক. প্র.

১১। কোন বৃত্তের পরিধি, তিনটি বিন্দুদ্বারা সমান সমান তিনটি চাপে বিভক্ত হইলে, ঐ বিন্দুত্রয়ে অঙ্কিত স্পর্শকগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে। [ক. প্র.

১২। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিয়া নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কিত হইলে উহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

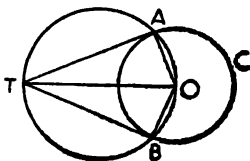
১৩। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যে সকল বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তাহাদের সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

১৪। যে বিন্দু দিয়া কোন এক নির্দিষ্ট বৃত্তের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের স্পর্শক টানা যায় সেই বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ক. প্র.

১৫। যে সকল বৃত্ত দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উপপাদ্য ৪৬

কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[Two tangents can be drawn to a circle from an external point.]

মনে কর, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং T বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, T হইতে বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে, দুইয়ের অধিক নহে।

অঙ্কন। OT সংযুক্ত কর, এবং উহাকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহা যেন ABC বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে।

TA, TB, BA এবং OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। TAO এবং TBO প্রত্যেকে বৃত্তার্ধস্থ কোণ বলিয়া উহারা প্রত্যেকে এক সমকোণ।

অর্থাৎ TA এবং TB, যথাক্রমে ব্যাসার্ধ OA এবং OBএর লম্ব।

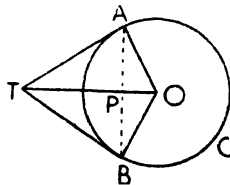
∴ TA এবং TB প্রত্যেকে বৃত্তের স্পর্শক। [উপ. ৪৪

স্থতরাং বৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু Tএর সহিত সংযুক্ত করিলে স্পর্শক পাওয়া যায়; এবং বৃত্ত দুইটি দুইয়ের অধিক বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না। অতএব T হইতে ABCএর উপর দুইয়ের অধিক স্পর্শক অঙ্কিত হইতে পারে না। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর স্পর্শক টানা যায় না। কারণ, OT ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত ABC বৃত্তকে ছেদ করিতে পারে না।

উপপাদ্য ৪৭

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান, এবং উহারা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[The two tangents drawn to a circle from an external point are equal and subtend equal angles at the centre.]

মনে কর, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু T হইতে TA এবং TB স্পর্শকদ্বয় অঙ্কিত হইয়াছে, এবং OA, OB ও OT সংযুক্ত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $TA = TB$,

(২) $\angle AOT = \angle BOT$ ।

প্রমাণ। TAO, TBO ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle TAO$ এবং $\angle TBO$ সমকোণ,

অতিভুজ TO সাধারণ বাহু,

এবং ব্যাসার্ধ $AO = BO$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

∴ $TA = TB$ (১)

এবং $\angle AOT = \angle BOT$ (২) ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। A এবং B বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা TOদ্বারা লম্ব ভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ২। TA এবং TB, TOর সহিত সমভাবে নত (সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে)।

অনুশীলনী

১। বৃত্তের কোন জ্যা এর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় জ্যার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

২। কোন বৃত্ত দুইটি পরস্পর ছেদকারী সরলরেখাদ্বয়কে স্পর্শ করিলে, উহার কেন্দ্র সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে।

৩। পরস্পর-ছেদকারী দুইটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া যে সমস্ত বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিলে এবং উভয়কে স্পর্শ করিয়া QR সরলরেখা টানিলে, QPR একটি সমকোণ হইবে। [ক. প্র.

৫। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক অপর একটি স্পর্শকের যে অংশ ছেদ করে তাহা বৃত্তের কেন্দ্রে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। [বো. প্র.

৬। OA এবং OB একটি বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক, অপর একটি স্পর্শক PQ, OA এবং OBকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিলে PQ, বৃত্তের কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করিবে।

৭। উপপাদ্য ৪৭এর চিত্রে প্রমাণ কর যে $\angle ATB = 2\angle OAB$।

৮। কোন বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের

(১) যে-কোন দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান।

(২) কেন্দ্রে অবস্থিত যে-কোন দুইটী বিপরীত বাহুর সম্মুখস্থ কোণ-দ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ। [ক. প্র

৯। বৃত্তের পরিলিখিত করিয়া অঙ্কিত সামন্তরিক রম্বস হইবে।

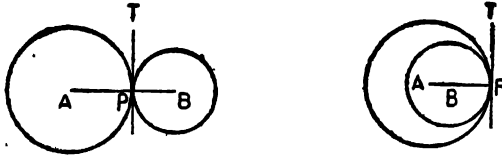
১০। বৃত্তের পরিলিখিত করিয়া অঙ্কিত আয়তক্ষেত্র একটী বর্গক্ষেত্র হইবে।

১১। যদি কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান হয়, প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তের পরিলিখিত হইবে অর্থাৎ উহার বাহুগুলি স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

এই উপপাদ্যটি এই অনুশীলনীর ৮ (১)এর বিপরীত।

উপপাদ্য ৪৮

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয় এবং স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

[If two circles touch (internally or externally), their centres and the point of contact are in one and the same straight line.]

মনে কর, A এবং B, দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র, উহারা P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A,P এবং B একই সরলরেখায় অবস্থিত।

AP এবং BP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। বৃত্তদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ;

∴ P বিন্দু দিয়া উভয় বৃত্তের এক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

মনে কর, PT, P বিন্দুতে উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক। সুতরাং PT, ব্যাসার্ধ APএর লম্ব। [উপ ৪৪

এইরূপ PT, ব্যাসার্ধ BPএর লম্ব।

∴ TPA এবং TPB কোণদ্বয় দুই সমকোণ।

∴ A, P এবং B একই সরলরেখায় অবস্থিত। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। ১ম চিত্রে বৃত্ত দুইটি বহিঃস্থভাবে এবং ২য় চিত্রে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে।

অনু ১। দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

অনু ২। দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিলে, উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।

অনুশীলনী

১। কতকগুলি বৃত্ত পরস্পরকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। [ক. প্র.

২। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধির একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে যে সকল বৃত্ত স্পর্শ করে তাহাদের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। দুইটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি সরলরেখা পরিধিদ্বয়কে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিলে, (১) A এবং B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে; (২) A এবং B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

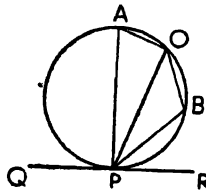
৪। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে উহাকে স্পর্শ করিয়া কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কিত কর। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ?

৫। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা আর একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় ?

৬। 2", 3" এবং 4" ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিলে কেন্দ্রত্রয় যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিবে তাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উপপাদ্য ৪৯

কোন বৃত্তের একটি স্পর্শক স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন জ্যার সহিত যে-কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ-দুইটির সমান হইবে।

[The angles, made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact, are equal to the angles in the alternate segments of the circle.]

মনে কর, QR স্পর্শকটি APB বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং স্পর্শবিন্দু P হইতে PO একটি জ্যা অঙ্কিত হওয়ায় OPR এবং OPQ কোণদ্বয় উৎপন্ন হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $\angle$OPR = একান্তর PAO বৃত্তাংশস্থ কোণ,

এবং (২) $\angle$OPQ = একান্তর PBO বৃত্তাংশস্থ কোণ।

অঙ্কন। P বিন্দু দিয়া PA ব্যাসটি অঙ্কিত কর।

PO দ্বারা ছিন্ন যে বৃত্তাংশে A বিন্দু আছে তাহার প্রতিযোগী চাপে যে-কোন B বিন্দু লও।

AO, OB, BP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। (১) যেহেতু PA একটি ব্যাস,

$\therefore$ $\angle$AOP = এক সমকোণ,

$\therefore$ $\angle$PAO + $\angle$OPA = এক সমকোণ।

আবার, QPR একটি স্পর্শক এবং PA স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাস,

$\therefore$ $\angle APR$ = এক সমকোণ ;

অর্থাৎ $\angle OPR + \angle OPA$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle OPR + \angle OPA = \angle PAO + \angle OPA$,

উভয়পক্ষ হইতে $\angle OPA$ বিয়োগ করিলে,

$\angle OPR = \angle PAO$ = একান্তর PAO বৃত্তাংশস্থ কোণ।

(২) আবার AOBP একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle PBO = \angle PAO$এর সম্পূরক (উপ ৩৭)

= $\angle OPR$এর সম্পূরক ($\because$ $\angle OPR = \angle PAO$)

= $\angle OPQ$।

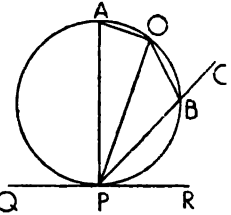
$\therefore$ $\angle OPQ$ = একান্তর PBO বৃত্তাংশস্থ কোণ।

ই উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

P বিন্দু দিয়া যে-কোন ছেদক PBC অঙ্কিত হইল, যেন ইহা বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AO, OB সংযুক্ত কর।

AOBP, একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore$ $\angle OBC = \angle PAO$। [উপ ৩৭ অনু

এখন P স্থির রাখিয়া PBC ঘুরাইলে B ক্রমশঃ Pএর নিকটবর্তী হইতে থাকে। সুতরাং চরমাবস্থায় B, Pএর সহিত এবং PBC, PRএর সহিত মিলিয়া যাইবে। অতএব ছেদক PBC, স্পর্শক PRএ পরিণত হইবে এবং $\angle OBC$, $\angle OPR$ হইবে।

কিন্তু B বিন্দু যেখানেই অবস্থিত হউক না কেন

সর্বদাই $\angle OBC = \angle PAO$,

$\therefore$ $\angle OPR = \angle PAO$। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। উপপাদ্য ৪৯এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, বৃত্তের কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান। [ক. প্র.

২। উপপাদ্য ৪৯.এর বিপরীত উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচন লিখিয়া উহা প্রমাণ কর।

৩। কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত হইতে এমন একটি বৃত্তাংশ ছেদ কর যেন বৃত্তাংশস্থ কোণ একটী নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

৪। একটী বৃত্তকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক বৃত্তাংশস্থ কোণ অপর বৃত্তাংশস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়।

৫। বৃত্তের AB এবং AC জ্যাদ্বয় সমান হইলে, প্রমাণ কর যে, A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক BCএর সহিত সমান্তরাল। [এ. প্র.

৬। দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে A বিন্দুতে স্পর্শ করিল। A বিন্দু হইতে অঙ্কিত APX এবং AQY যে কোন সরলরেখাদ্বয় বৃত্ত দুইটিকে যথাক্রমে P ও Q এবং X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, PQ এবং XY সমান্তরাল।

৭। AB দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা; বৃত্তদ্বয়ের একটি অপরটির কেন্দ্র O ভেদ করিল। প্রমাণ কর যে, A বিন্দুতে অঙ্কিত প্রথম বৃত্তের স্পর্শক AT এবং ABএর অন্তর্গত কোণটী OA দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

৮। কোন বৃত্তে একটি জ্যার সহিত সমান্তরাল করিয়া একটি স্পর্শক অঙ্কিত হইলে, প্রমাণ কর যে জ্যা দ্বারা ছিন্ন চাপটি স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [ঢা. বো.

৯। দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিলে, যদি উহাদিগকে ছেদ করিয়া একটি সরলরেখা টানা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, দুই বৃত্তের অন্তর্গত ঐ সরলরেখার অংশ দুইটি স্পর্শবিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

[ক. প্র.

১০। PAB বৃত্তের P বিন্দু হইতে একটী জ্যা PQ এবং একটি স্পর্শক

PT অঙ্কিত হইল। PQ দ্বারা ছিন্ন যে-কোন চাপ PBQএর মধ্যবিন্দু B হইতে PQ এবং PTএর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান। [ক. প্র.

১১। দুইটী বৃত্ত A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল; একটীর পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু P হইতে PAC, PBD সরলরেখাদ্বয় অঙ্কিত করায়, উহারা অপর বৃত্তটিকে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করিলে, CD, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল হইবে।

১২। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যেন উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান জ্যা উৎপন্ন করে।

[**সঙ্কেত**—নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান একটি জ্যা অঙ্কিত কর, বৃত্তের কেন্দ্রকে কেন্দ্র করিয়া এবং ঐ জ্যাটিকে স্পর্শ করিয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এখন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দ্বিতীয় বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক অভীষ্ট জ্যা উৎপন্ন করিবে।]

১৩। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু স্পর্শ করিয়া DEF বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, $\triangle DEF$ এর কোণগুলি

$90^\circ - \frac{A}{2}$, $90^\circ - \frac{B}{2}$ এবং $90^\circ - \frac{C}{2}$ হইবে। [বো. প্র.

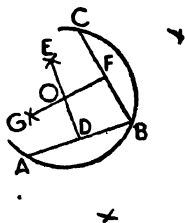
১৪। AB কোন বৃত্তের ব্যাস এবং AC একটি জ্যা। C বিন্দুতে CP স্পর্শকের উপর AP লম্ব টানিলে, প্রমাণ কর AC, $\angle PAB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [বো. প্র.

১৫। ABC একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। যদি AB ও DC, P বিন্দুতে এবং BC ও AD, Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তাহা হইলে $\angle APD$ এবং $\angle AQB$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ একটি সমকোণ হইবে। [ঢা. বো.

১৬। একটি বৃত্তের AB এবং AC দুইটি স্পর্শক। ABC ত্রিভুজের বাহিরে পরিধির উপর D বিন্দু লইলে, $\angle ABD$ এবং $\angle ACD$এর সমষ্টি নিয়ত সমান। [পা. ক.

বৃত্ত-বিষয়ক সম্পাদ্য

সম্পাদ্য ১৯

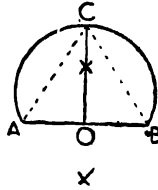
একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত বা নির্দিষ্ট চাপের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।
[To find the centre of a given circle or of a given arc of a circle.]

মনে কর, ABC একটি চাপ।
ইহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে-কোন দুইটি জ্যা AB ও BC লও।
DE ও FG দ্বারা এই জ্যা দুইটিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর।
DE ও FG যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।
O, নির্ণেয় কেন্দ্র হইবে।

প্রমাণ। DE, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।
∴ DEএর প্রত্যেক বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী।
এইরূপ FG এর প্রত্যেক বিন্দু B এবং C হইতে সমদূরবর্তী।
∴ উহাদের একমাত্র সাধারণ বিন্দু O, A, B এবং C হইতে সমদূরবর্তী।
∴ O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র। ই: স. বি.

সম্পাদ্য ২০

একটি নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে

[To bisect a given arc.]

মনে কর, ACB একটি নির্দিষ্ট চাপ।
ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত কর, এবং AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক DC অঙ্কিত কর। OC, চাপটিকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।
তাহা হইলে চাপটি C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

AC ও BC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। OC, AB এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

∴ OC এর প্রত্যেক বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী।

∴ জ্যা AC = জ্যা BC,

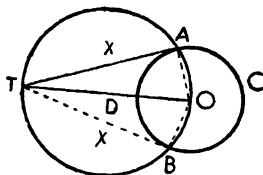
∴ চাপ AC = চাপ BC।

অতএব ACB চাপটি C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল। ই. স. বি.

স্পর্শক

সম্পাদ্য ২১

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর উহার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a circle from a given external point.]

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্টবৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র। T বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

T হইতে ABC বৃত্তের উপর একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। TO সংযুক্ত কর, এবং TOকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। D কেন্দ্র করিয়া DO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন ABC বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে।

TA এবং TB সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে TA এবং TB, ABC এর স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। AO সংযুক্ত কর।

∠TAO অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া এক সমকোণ।

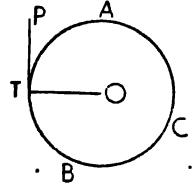
সুতরাং ইহা ব্যাসার্ধ AO এর লম্ব।

∴ TA, A বিন্দুতে ABC বৃত্তের একটী স্পর্শক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে TB, ABCত্রিভুজের আর একটি স্পর্শক। ই. স বি.

দ্রষ্টব্য। ৪৬ উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে যে কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে

স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় এবং উহারা পরস্পর সমান। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর **দুইটি** স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। উহার পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে **মাত্র একটি** স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। এবং বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে **একটিও স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় না।**

T বিন্দুটী পরিধির উপর অবস্থিত হইলে, OT সংযুক্ত কর এবং T বিন্দুতে TP, OTএর লম্ব টান। তাহা হইলে TP, ABC বৃত্তের স্পর্শক।

সংজ্ঞা। কোন সরলরেখা দুইটী বৃত্তের প্রত্যেকটীকে স্পর্শ করিলে, উহাকে বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক** (Common Tangent) বলে।

দুইটী বৃত্তের একটী সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে উহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct Common Tangent) বলে।

কিন্তু সাধারণ স্পর্শকটী কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাকে ছেদ করিলে উহাকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse Common Tangent) বলে।

সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ-প্রণালী

কল্পনার সত্যতা ধরিয়া লইয়া উহার সাহায্যে উপপাদ্যে যুক্তিদ্বারা সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া অথবা সম্পাদ্যে অঙ্কন সম্পন্ন করার প্রণালীকে **সংশ্লেষণ-প্রণালী** (Synthesis) বলে।

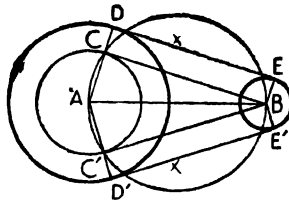
কিন্তু জটিল জ্যামিতিক সম্পাদ্য অঙ্কন করিতে কিংবা উপপাদ্য প্রতিপন্ন করিতে আর একটি প্রণালীও অবলম্বন করা যায়। যে উপপাদ্যটি প্রমাণ করিতে হইবে অথবা যে অঙ্কনটি সম্পন্ন করিতে হইবে, ধরিয়া লও উহা প্রমাণিত বা সম্পন্ন করা হইয়াছে। এইরূপ ধরিয়া লইয়া যদি অনুশীলন ও যুক্তি-দ্বারা কল্পনাতে যাহা দেওয়া আছে তাহা পাইবার ইঙ্গিত পাওয়া যায়, এই

ইঙ্গিত অবলম্বনে বিপরীত-ক্রমে সংশ্লেষণ-প্রণালীদ্বারা সম্পাদ্যের অঙ্কন অথবা উপপাদ্যের প্রমাণ সহজ হয়। এই প্রণালীর নাম **বিশ্লেষণ-প্রণালী** (Analysis)।

অঙ্কন ক্ষেত্রে এই প্রণালী বিশেষ উপযোগী।

সম্পাদ্য ২২

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের সরল সাধারণ-স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a direct common tangent to two circles.]

মনে কর, A বৃহত্তর বৃত্তের এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্র, এবং a ও b উহাদের ব্যাসার্ধ।

এই দুই বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত কর।

A কেন্দ্র করিয়া এবং ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর ফল (a—b) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

ABকে ব্যাস করিয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন অভ্যন্তরস্থ বৃত্তকে C এবং C′ বিন্দুতে ছেদ করে।

BC ও BC′ সংযুক্ত কর, সুতরাং BC ও BC′ অভ্যন্তরস্থ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

AC ও AC′ সংযুক্ত কর এবং উহারা বর্ধিত হইয়া বৃহত্তর বৃত্তকে D ও D′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

B হইতে ADএর একই দিকে উহার সমান্তরাল BE টান এবং AD′এর

একই দিকে উহার সমান্তরাল BE′ অঙ্কিত কর। DE এবং D′E′ সংযুক্ত কর।

DE এবং D′E′ সরল সাধারণ স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। CD = AD − AC = $a-(a-b)=b$ = BE,

কিন্তু CD ও BE পরস্পর সমান্তরাল,

∴ CD ও BE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

∴ BC ও DE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

∴ BCDE একটি সামন্তরিক।

কিন্তু বৃত্তার্ধস্থ ∠ACB = এক সমকোণ,

∴ ∠BCD = এক সমকোণ।

∴ BCDE একটি আয়তক্ষেত্র।

সুতরাং ∠ADE এবং ∠BED প্রত্যেক এক সমকোণ।

∴ DE, ব্যাসার্ধ AD এবং BE উভয়ের লম্ব।

∴ DE উভয় বৃত্তকে স্পর্শ করিল।

অতএব DE বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় D′E′ আর একটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

ই. স. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। দুইটি বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

এই সম্পাদ্যটির (২২) বিশ্লেষণ-প্রণালী নিম্নে প্রদত্ত হইল।

বিশ্লেষণ। ধরিয়া লও DE উভয়ে বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক এবং D ও E স্পর্শবিন্দুদ্বয়। সুতরাং বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ AD এবং BE ; প্রত্যেকে DEএর লম্ব, অতএব AD এবং BE সমান্তরাল।

এখন BC, DEএর সমান্তরাল টানিলে, BCDE একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

∴ CD = BE = b।

AD এবং BE, AB রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে AC = AD—CD = $a-b$; এবং ∠ACB = এক সমকোণ।

অতএব ইহা প্রতিপন্ন হইল যে, প্রদত্ত বস্তু (data) হইতে $a-b$ (AC) ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব, এবং B বিন্দু হইতে অঙ্কিত BC ইহার স্পর্শক। এই ইঙ্গিত হইতেই এখন বিপরীত ক্রমে (Retracing the steps) অঙ্কনটি সম্পন্ন করা যায়।

দ্রষ্টব্য। একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের সম্পূর্ণ বহিঃস্থ হইলে উহাদের আরও দুইটি **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** অঙ্কিত করা যায়।

সম্পাদ্য ২৩

দুইটি বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a transverse common tangent to two circles.]

বিশ্লেষণ। ধরিয়া লও DE একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক। উহা বৃহত্তর বৃত্তকে (A) D বিন্দুতে এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে (B) E বিন্দুতে স্পর্শ করে। এস্থলে AD এবং BE ব্যাসার্ধদ্বয় AB রেখার বিপরীত দিকে অবস্থিত।

এখন বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ AD এবং BE প্রত্যেকে DEএর লম্ব।

∴ AD এবং BE সমান্তরাল।

এখন BC, DEএর সমান্তরাল টানিলে উহা যদি বর্ধিত ADকে C বিন্দুতে ছেদ করে, তবে BCDE একটি আয়তক্ষেত্র।

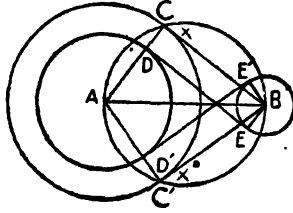
∴ CD = BE = b।

∴ AC = AD + CD = $a+b$; এবং ∠ACB = এক-সমকোণ।

সুতরাং প্রতিপন্ন হইল যে, A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AC = $(a+b)$ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে BC উহার স্পর্শক হইবে।

এই ইঙ্গিত হইতে বিপরীত ভাবে প্রক্রিয়া সম্পন্ন করিলেই অভীষ্ট অঙ্কন প্রাপ্ত হওয়া যাইবে।

সংশ্লেষণ। মনে কর, A বৃহত্তর বৃত্তের এবং B ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্র, এবং a ও b যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ।

এই বৃত্তদ্বয়ের তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত কর। A কেন্দ্র করিয়া বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টি $(a+b)$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, এবং B হইতে এই বৃত্তের উপর BC এবং BC′ স্পর্শকদ্বয় টান।

AC ও AC′ সংযুক্ত কর, উহারা যেন নির্দিষ্ট বৃহত্তর বৃত্তকে D ও D′ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

ABএর যেদিকে AD আছে তাহার বিপরীত দিকে ADএর সমান্তরাল করিয়া B হইতে BE ব্যাসার্ধ টান।

এইরূপ যেদিকে AD′ আছে তাহার বিপরীত দিকে AD′এর সমান্তরাল করিয়া B হইতে BE′ ব্যাসার্ধ টান।

DE ও D′E′ সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, DE এবং D′E′ উভয় বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। যেহেতু AD $= a$, এবং AC $= a+b$,

∴ CD = AC—AD $= a+b-a=b=$ BE,

এবং BE ও CD সমান্তরাল,

∴ BE ও CD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

∴ BC ও DE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং, BCDE একটি সামন্তরিক।

কিন্তু বৃত্তার্ধস্থ $\angle ACB =$ এক সমকোণ ;

$\therefore$ BCDE একটি আয়তক্ষেত্র।

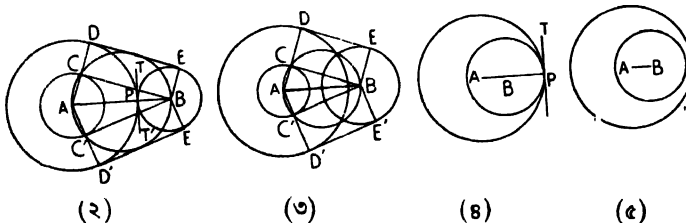
সুতরাং, $\angle ADE$ এবং $\angle BED$ প্রত্যেকে এক-সমকোণ।

$\therefore$ DE বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে স্পর্শ করিল,

অর্থাৎ DE উভয় বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, D′E′ উভয় বৃত্তের আর একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক। ই. স. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। দুই বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

দ্রষ্টব্য। উপরি-উক্ত দুইটী সম্পাদ্যে আমরা যে চিত্র দুইটি দিয়াছি, উহাতে (১) বৃত্ত দুইটীর একটী অপরটীর সম্পূর্ণ বাহিরে অবস্থিত। উহাদের আরও চারি প্রকার অবস্থিতি হইতে পারে। (২) উভয়ের মধ্যে বহিঃস্পর্শ, (৩) পরস্পর ছেদ-করণ, (৪) উভয়ের মধ্যে অন্তঃস্পর্শ এবং (৫) ক্ষুদ্রতরটীর বৃহত্তরটীর সম্পূর্ণ অভ্যন্তরে অবস্থিতি।

(২) উভয়ের মধ্যে বহিঃস্পর্শ হইলে দুইটী সরল সাধারণ স্পর্শক DE এবং D′E′ টানা যাইতে পারে, কিন্তু ($a+b$) ব্যাসার্ধের A কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত B বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং AB ব্যাস লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহাও B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উভয়ে মাত্র একই বিন্দু Bতে স্পর্শ করিবে। সুতরাং তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের স্থলে উভয়ের স্পর্শবিন্দু Pতে একটীমাত্র সাধারণ স্পর্শক হইবে, যেন তির্যক স্পর্শকদ্বয়ের সমাপতন হইয়া একটি স্পর্শক PT হইল। অতএব এস্থলে তিনটি স্পর্শক হইল।

(৩) পরস্পর ছেদ করিলে, $(a+b)$ ব্যাসার্ধের A কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত, AB ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের সম্পূর্ণ বাহিরে অবস্থিত হইবে। সুতরাং এস্থলে তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইবে না, কেবলমাত্র দুইটী সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইবে।

(৪) বৃত্ত দুইটির পরস্পর P বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ হইলে, $(a-b)$ ব্যাসার্ধের A কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং AB ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত ও বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উভয়ের B বিন্দুতেই স্পর্শ হইবে। সুতরাং P বিন্দুতে নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের কেবল একটিমাত্র স্পর্শক টানা যায়, যেন সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটির সমাপতন হয়। (৩) এর ন্যায় এস্থলেও তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানা যায় না।

(৫) একটি বৃত্ত অপরটির অভ্যন্তরে থাকিলে একটি স্পর্শকও অঙ্কিত হইতে পারে না।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, একটি বৃত্ত অপরটির সম্পূর্ণ বাহিরে থাকিলে, **চারিটি সাধারণ স্পর্শক** অঙ্কিত হইতে পারে।

বৃত্তদ্বয়ের পরস্পর বহিঃস্পর্শ হইলে, **তিনটি সাধারণ স্পর্শক**

বৃত্তদ্বয় পরস্পর ছেদ করিলে, **দুইটি সাধারণ স্পর্শক**

বৃত্তদ্বয়ের অন্তঃস্পর্শ হইলে, **একটি সাধারণ স্পর্শক**

একটি অপরটির সম্পূর্ণ অভ্যন্তরে অবস্থিত হইলে, **কোন সাধারণ স্পর্শকই অঙ্কিত হইতে পারে না।**

সুতরাং বৃত্তদ্বয় পরস্পর সম্পূর্ণ বাহিরে থাকিলে চারিটি সাধারণ স্পর্শক হইবে, কিন্তু বৃত্তদুইটি যতই সম্মুখীন হইতে থাকে ক্রমে ক্রমে উহাদের সাধারণ স্পর্শক-সংখ্যাও কমিতে থাকে এবং অবশেষে যখন একটি বৃত্ত অপরটির সম্পূর্ণ অভ্যন্তরে থাকে, তখন স্পর্শক টানা একবারেই সম্ভব হয় না।

অনুশীলনী

১। 1·5″ ব্যাসার্ধের একটী বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং উহার কেন্দ্র হইতে 2·5″ দূরে P বিন্দু হইতে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। স্পর্শক দুইটীর দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে উহারা পরস্পর সমান। স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার দৈর্ঘ্য কত ?

২। একটী নির্দ্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটী স্পর্শক অঙ্কিত কর।

৩। নিম্নলিখিত অবস্থায় কয়টী সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত হইতে পারে ?

(১) যখন বৃত্তদুইটী পরস্পর ছেদ করে।

(২) যখন উহাদের অন্তঃস্পর্শ হয়।

(৩) যখন উহাদের বহিঃস্পর্শ হয়।

(৪) যখন একটী অপরটীর সম্পূর্ণ বাহিরে থাকে।

(৫) যখন একটী অপরটির সম্পূর্ণ অভ্যন্তরে থাকে।

৪। দুইটী বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1·5″ এবং 1″ এবং উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার পরিমাণ যথাক্রমে 1″, 2·5″, ·5″, 3″ হইলে, প্রত্যেকস্থলে সাধারণ স্পর্শকগুলি অঙ্কিত কর।

৫। দুইটি বৃত্তের ব্যাস যথাক্রমে 1″ এবং 3″ হইলে এবং উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার দৈর্ঘ্য 2″ হইলে, উহাদের সাধারণ স্পর্শকগুলি অঙ্কিত কর। এবং স্পর্শকগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬। দুইটী সমান সমান বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটী অঙ্কিত কর।
[সংকেত—মনে কর, A এবং B বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র। AB সংযুক্ত কর।

A ও B দিয়া CD এবং EF, ABএর লম্ব টান, যেন উহারা বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে C ও D এবং E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। CE এবং DF বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক]

৭। দুইটি বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় অথবা তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার উপর ছেদ করিবে।

৮। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের P বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ হইলে এবং QR একটি সরল সাধারণ স্পর্শক হইলে, প্রমাণ কর যে $\angle QPR$ একটি সমকোণ।

৯। দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্থভাবে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে, QR উহাদের একটী সরল সাধারণ স্পর্শক হইবে, প্রমাণ কর যে QRকে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত, উহাদের কেন্দ্রের সংযোজক সরল রেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১০। একটি বৃত্তের কেন্দ্র O দিয়া অঙ্কিত অপর একটি বৃত্ত প্রথম বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, A এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত প্রথম বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় OAB বৃত্তের পরিধির উপর মিলিত হইবে।

বৃত্তাঙ্কন

কোন বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইলে উহার (১) কেন্দ্রের অবস্থান এবং (২) ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য জানা থাকা আবশ্যক।

(১) কেন্দ্রের অবস্থান নির্দেশ করিতে হইলে দুইটি সর্তের আবশ্যক, প্রত্যেক সর্ত হইতে আমরা একটি করিয়া সঞ্চারপথ পাইতে পারি যাহার উপর কেন্দ্র অবস্থিত হইবেই। এবং উক্ত সঞ্চারপথদ্বয়ের ছেদবিন্দুই (এক বা একাধিক) কেন্দ্রের অবস্থান হইবার সম্ভাবনা।

(২) এইরূপে কেন্দ্রের অবস্থান নির্দিষ্ট হইলে, পরিধির উপর যে-কোন বিন্দু জানিতে অথবা নির্ণয় করিতে পারিলে ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যও পাওয়া যায়।

অতএব, যে-কোন তিনটি **স্বতন্ত্র উপাত্ত** (Independent Data) হইতে একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে। যথা—

(১) পরিধির উপর তিনটি বিন্দু দেওয়া থাকিলে,

(২) পরিধির উপর দুইটি বিন্দু ও ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকিলে,

(৩) তিনটি স্পর্শক দেওয়া থাকিলে,

কিংবা (৪) পরিধির উপর একটি বিন্দু, একটি স্পর্শক ও উহার স্পর্শবিন্দু দেওয়া থাকিলে।

সময় সময় দেখা যাইবে যে তিনটি উপাত্ত আছে, তাহা হইতে একাধিক বৃত্তাঙ্কন সম্ভব হইতে পারে।

বৃত্তাঙ্কনে আবশ্যক কয়েকটি সঞ্চারপথ

১। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

২। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত রেখাটীর লম্ব।

৩। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে উহার পরিধির কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—বৃত্তের কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক-রেখা (উভয় দিকে বর্ধিত)।

৪। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের সমান দূরে উহার উভয় পার্শ্বে অঙ্কিত সরল রেখাদ্বয়।

৫। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রকে কেন্দ্র করিয়া এবং উহার ব্যাসার্ধ ও নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের সমষ্টি ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি।

৬। পরস্পরছেদী সরল রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

৭। পরস্পর সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—উহাদের সমান্তরাল এবং সমদূরে অবস্থিত সরল রেখাটি।

অনুশীলনী

১। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এইরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অবস্থিত হয়।

[সঙ্কেত — বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক-রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে নির্দিষ্ট রেখাটিকে ছেদ করে, উহাই বৃত্তের কেন্দ্র]

২। তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি অঙ্কিত কর।

৩। একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহা কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং ঐ রেখার বহিঃস্থ অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

৪। একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহা অপর একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

[সঙ্কেত— বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এবং বৃত্তের কেন্দ্র ও পরিধিস্থিত নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক রেখার ছেদবিন্দুই নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধ।]

৫। দুইটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখার প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করিয়া একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কিত কর।

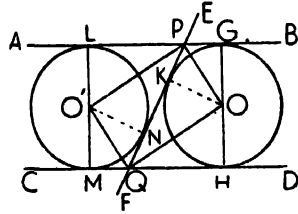
[সঙ্কেত— একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া ব্যাসার্ধের সমান দূরে একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর, উহা যেন সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সম-দ্বিখণ্ডকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।]

৬। দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 2·5″ এবং 2″ এবং উহাদের কেন্দ্র-দ্বয়ের ব্যবধান 6·5″ ; উহাদিগকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়া 3″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ? উভয় বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত ক্ষুদ্রতম বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

৭। দুইটি পরস্পর সমান্তরাল রেখা ও উহাদের একটি নির্দিষ্ট ভেদককে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এবং প্রমাণ কর যে, এইরূপ দুইটি সমান সমান বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

অঙ্কন। মনে কর, EF ভেদকটি AB এবং CD সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

BPQ এবং PQD কোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া PO এবং QO অঙ্কিত কর। উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল।

O হইতে AB, CD এবং EFএর উপর যথাক্রমে OG, OH এবং OK লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। এখন POএর উপর প্রত্যেক বিন্দু AB এবং EF হইতে সমদূরবর্তী,

$\therefore$ OG = OK,

অনুরূপ OH = OK = OG,

$\therefore$ O কেন্দ্র করিয়া OG ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত K এবং H দিয়া যাইবে, এবং উহা AB, EF এবং CDকে যথাক্রমে G, K এবং H বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। কারণ OG, OK এবং OH উহাদের উপর লম্ব।

EFএর অপর দিকেও অনুরূপ বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে, উহার ব্যাসার্ধ O′L = OG সহজেই প্রমাণ করা যায়; অতএব বৃত্ত দুইটী সমান।

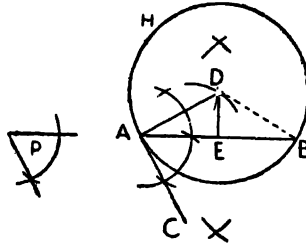
৮। এইরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহার কেন্দ্র একটী নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকে এবং উহা দুইটী বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় দিয়া যায়।

৯। একটী বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহার কেন্দ্র একটী নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর থাকে এবং উহা যেন একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটী নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১০। তিনটী সরলরেখার কোন দুইটি সমান্তরাল নহে, উহাদিগকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে?

সম্পাদ্য ২৪

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[On a given straight line describe a segment of a circle which shall contain an angle equal to a given angle.]

মনে কর, AB একটি নিদিষ্ট সরল রেখা এবং ∠P একটি নিদিষ্ট কোণ।

AB সরলরেখার উপর একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহার অন্তর্গত ∠Pএর সমান হয়।

অঙ্কন। AB সরলরেখার A বিন্দুতে ∠Pএর সমান করিয়া ∠BAC অঙ্কিত কর।

A বিন্দু হইতে ACএর উপর AD লম্ব অঙ্কিত কর।

AB সরল রেখাকে ED সরল রেখাদ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত কর, ED যেন ADকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন Dকে কেন্দ্র করিয়া DA ব্যাসার্ধ লইয়া AHB বৃত্ত অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে AFB (∠BACএর একান্তর) বৃত্তাংশটিই নির্ণেয় বৃত্তাংশ হইবে।

প্রমাণ। BD সংযুক্ত কর।

ED, ABএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক,

∴ EDএর প্রত্যেক বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী,

∴ DA = DB।

D কেন্দ্র করিয়া DA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা B বিন্দু দিয়া যাইবে।

যেহেতু AC, AD ব্যাসার্ধের লম্ব,

∴ AC, A বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক।

∴ $\angle BAC$ = একান্তর AHB বৃত্তাংশস্থ কোণ। [উপ ৪৯

কিন্তু $\angle BAC = \angle P$ (অঙ্কন)

∴ AHB বৃত্তাংশস্থ কোণ $= \angle P$.

সুতরাং AHB নির্ণেয় বৃত্তাংশ। ই. স. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। একটি বৃত্তকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহার একটি বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[পরিধির যে-কোন বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর এবং স্পর্শবিন্দু হইতে একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন উৎপন্ন কোণটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়। তাহা হইলে এই উৎপন্ন কোণের একান্তর বৃত্তাংশটি নির্ণেয় বৃত্তাংশ হইবে।]

অনুশীলনী

১। নির্দিষ্ট ভূমি ও শিরঃকোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষ একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২। ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, দেওয়া আছে ভূমি, শিরঃকোণ এবং—

(১) অন্য একটি বাহু।

(২) উন্নতি (altitude)। [ক, প্র,

(৩) ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমার দৈর্ঘ্য।

(৪) শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্বের পাদবিন্দু।

(৫) শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকের ও ভূমির ছেদবিন্দু।

(৬) কোন বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমা।

অঙ্কন। মনে কর, BC নির্দিষ্ট ভূমি, উহার উপর একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর যাহার অন্তর্গত কোণ নির্দিষ্ট শিরঃকোণের সমান। BC বাহু X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং CXএর উপর আর একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর যেন উহার অন্তর্গত কোণ নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়। এখন B কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট মধ্যমা ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন শেষোক্ত বৃত্তটিকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। CY সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করায় বৃত্তাংশটিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, AC সংযুক্ত কর। ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। XY সংযুক্ত কর। $\angle XYC$ = নির্দিষ্ট শিরঃকোণ = $\angle BAC$,

$\therefore$ XY এবং AB সমান্তরাল। কিন্তু X, BCএর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ Y, ACএর মধ্যবিন্দু, এবং BY = নির্দিষ্ট মধ্যমা।

সুতরাং ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

(৭) ভূমির একটি প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য।

(৮) অপর দুই বাহুর সমষ্টি।

মনে কর, BC ভূমি, $\angle A$ নির্দিষ্ট শিরঃকোণ এবং K বাহুদ্বয়ের সমষ্টি।

অঙ্কন। $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত কর। BC এর উপর BAC বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর, যেন উহার অন্তর্গত কোণ $\angle A$এর সমান হয়। আবার BCএর উপর $\frac{1}{2}$ $\angle A$এর সমান অন্তর্গত-কোণ-বিশিষ্ট আর একটি বৃত্তাংশ BDC অঙ্কিত কর।

B কেন্দ্র করিয়া ও K ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা BDC চাপকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

BD এবং BE সংযুক্ত কর, উহারা BAC চাপটিকে A এবং A´ বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও A´C সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC এবং A´BC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। DC ও EC সংযুক্ত কর।

$\angle ACD = \angle BAC - \angle ADC = \angle A - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle A = \angle ADC$।

$\therefore$ AD = AC,

$\therefore$ AB + AC = AB + AD = BD = K.

$\therefore$ ABC একটি নির্ণেয় ত্রিভুজ।

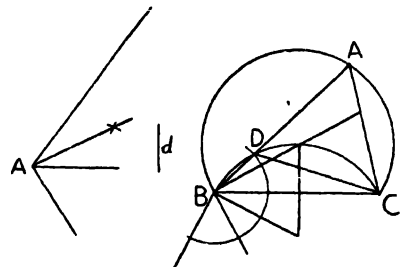
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে A´BCও নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

(৯) অপর দুই বাহুর অন্তর।

মনে কর, BC ভূমি, $\angle A$ নির্দিষ্ট শিরঃকোণ এবং d অপর দুই বাহুর অন্তর।

অঙ্কন। $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং দ্বিখণ্ডক রেখাটির একটীর লম্ব টান।

BCএর উপর, $\angle A$এর সমান অন্তর্গত-কোণ-বিশিষ্ট BAC বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর; এবং $90° + \frac{A}{2}$এর সমান অন্তর্গত-কোণ-বিশিষ্ট BDC বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর।

B কেন্দ্র করিয়া d ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, উহা BDC চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। BD সংযুক্ত কর, এবং উহা বর্ধিত করিয়া BAC চাপকে A বিন্দুতে ছেদ করা হইল। AC সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

প্রমাণ। DC সংযুক্ত কর।

$\angle ACD = \angle BDC - \angle DAC = 90° + \frac{A}{2} - A = 90° - \frac{A}{2}$।

আবার, $\angle ADC = 180° - \angle BDC = 180° - (90° + \frac{A}{2}) = 90° - \frac{A}{2}$.

$\therefore \quad \angle ADC = \angle ACD,$

$\therefore \quad AC = AD,$

$\therefore \quad AB - AC = AB - AD = BD = d$।

$\therefore$ ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

(১০) তুইটি নিদিষ্ট সরল রেখা হইতে সমদূরবর্তী শীর্ষ।

৩। একটি বৃত্তের জ্যা, BC এবং উহার একটি বিন্দু X দেওয়া আছে, পরিধির উপর এমন একটি বিন্দু A নির্ণয় কর যেন AX, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়।

৪। এইরূপ তুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শকারী বৃহত্তর বৃত্তের জ্যাগুলি ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসের সমান হয়।

৫। একটি ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যেন উহার বাহুত্রয় ঐ বিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৬। 1·5″. দীর্ঘ একটি সরলরেখার উপর 45° কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর।

৭। 2″ দীর্ঘ একটি সরলরেখার উপর 120° কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর।

৮। 2″ দীর্ঘ একটি সরলরেখার উপর 90° কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর।

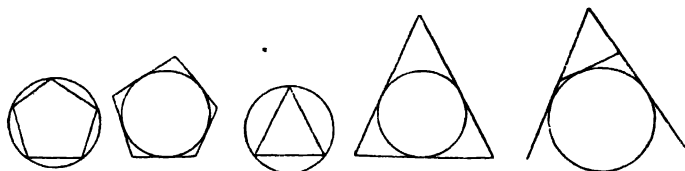
৯। একটি ত্রিভুজের ভূমি, উন্নতি এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। একটি নিদিষ্ট ভূমির উপর নির্দিষ্ট শিরঃকোণ-বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

১১। একটি ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ এবং শিরঃকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

অন্তর্বৃত্ত, পরিবৃত্ত ও বহির্বৃত্ত

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের **শীর্ষগুলি** একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত থাকিলে, ক্ষেত্রটি বৃত্তের **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইল বলা হয়; এবং বৃত্তটি ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের **পরিলিখিত** (circumscribed) বলা হয়।

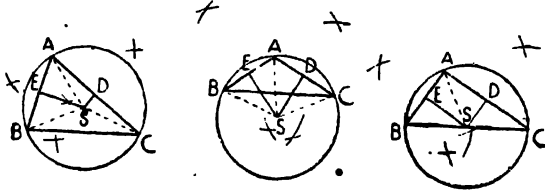
কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিলে ঐ বৃত্তটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত হইল বলা হয় এবং ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্রটি উক্ত বৃত্তের পরিলিখিত হইল বলা হয়।

কোন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তকে উহার **পরিবৃত্ত** বলে।

যে বৃত্ত ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে স্পর্শ করে উহাকে ত্রিভুজটির **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed Circle অথবা In-circle) বলা হয়, এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) ও **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (In-radius) বলা হয়।

যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজের একটি বাহু ও অপর দুইটি বাহুর বর্ধিত অংশদ্বয়কে স্পর্শ করে তাহাকে ত্রিভুজটির **বহির্বৃত্ত** (Escribed circle বা Ex-circle) বলে, এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে **বহিঃকেন্দ্র** (ex-centre) ও **বহির্ব্যাসার্ধ** (ex-radius) বলা হয়।

সম্পাদ্য ২৫

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To circumscribe a circle about a given triangle.]

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ইহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB এবং ACএর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক : ES এবং DS অঙ্কিত কর।

উহারা পরস্পরকে S বিন্দুতে ছেদ করিল।

SA সংযুক্ত কর।

S কেন্দ্র করিয়া SA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

এই বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে।

BS ও CS সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ES, AB এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক,

∴ S, A এবং B হইতে সমদূরবর্তী,

∴ SA = SB।

অনুরূপ SA = SC।

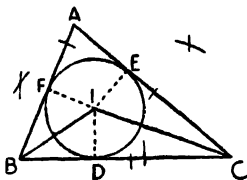
∴ SA = SB = SC।

সুতরাং অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। চিত্র হইতে বুঝা যায় যে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী কিংবা সমকোণী হইলে কেন্দ্রটি যথাক্রমে ত্রিভুজটির অভ্যন্তরে, বাহিরে কিংবা অতিভুজের মধ্যবিন্দুতে অবস্থিত হইবে।

সম্পাদ্য ২৬

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To inscribe a circle in a given triangle.]

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ইহার অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ∠ABC ও ∠ACB যথাক্রমে BI ও CI দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং উহারা I বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

I বিন্দু হইতে BC বাহুর উপর ID লম্ব টান। I কেন্দ্র করিয়া ID ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত হইবে। I হইতে CA এবং AB এর উপর IE এবং IF লম্ব টান।

প্রমাণ। BI, ∠ABCএর সমদ্বিখণ্ডক,

∴ BI এর উপর প্রত্যেক বিন্দু AB এবং BC হইতে সমদূরবর্তী,

∴ ID = IF।

এইরূপে প্রমাণ করা যায়, ID = IE,

∴ ID = IE = IF,

সুতরাং I কেন্দ্র করিয়া ID ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত E ও F বিন্দু দিয়া যাইবেই।

আবার, BC বাহু ID ব্যাসার্ধের লম্ব বলিয়া বৃত্তটিকে D বিন্দুতে স্পর্শ করে।

অনুরূপ CA এবং BA বৃত্তটিকে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে স্পর্শ করে।

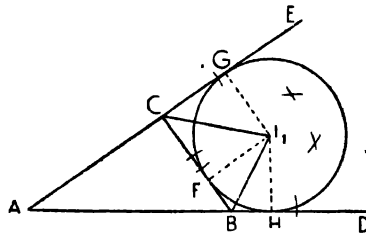
অতএব DEF বৃত্তটি $\triangle ABC$ এর ভিতরে থাকিয়া উহার বাহুগুলিকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ DEF, $\triangle ABC$ এর অন্তর্বৃত্ত। ই. স. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু এবং উহাদের সম্পাতবিন্দুই ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

সম্পাদ্য ২৭

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw an escribed circle of a given triangle.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় D ও E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উহা BC বাহু এবং AB ও AC বাহুদ্বয়ের বর্ধিত অংশ BD ও CEকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন। BI_1 এবং CI_1 দ্বারা যথাক্রমে $\angle DBE$ এবং $\angle BCE$ কে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

BI_1 এবং CI_1, I_1 বিন্দুতে ছেদ করিল।

BC এর উপর I_1F লম্ব অঙ্কিত কর।

I_1 কে কেন্দ্র করিয়া I_1F ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

BD এবং CE এর উপর যথাক্রমে I_1H এবং I_1G লম্ব টান।

প্রমাণ। I_1B, $\angle DBC$ এর সমদ্বিখণ্ডক,

$\therefore$ I_1 বিন্দু AD ও BC হইতে সমদূরবর্তী।

$\therefore$ $I_1H = I_1F.$

এইরূপেই প্রমাণ করা যায় $I_1F = I_1G$

$\therefore$ $I_1F = I_1G = I_1H.$

অতএব I_1 কেন্দ্র করিয়া I_1F ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত G এবং H বিন্দু দিয়া যাইবেই।

আবার, BC, AE এবং AD যথাক্রমে I_1D, I_1E এবং I_1F ব্যাসার্ধত্রয়ের লম্ব বলিয়া FGH বৃত্তটি BC, AE এবং ADকে যথাক্রমে F, G এবং H বিন্দুতে স্পর্শ করে।

এস্থলে বৃত্তটি ত্রিভুজের BC বাহু এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিত অংশ BD ও CE কে স্পর্শ করায় উহা একটি বহির্বৃত্ত হইল। ই. স. বি.

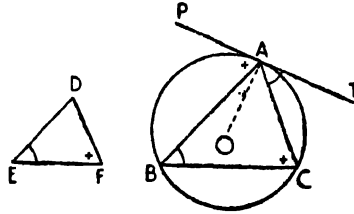
দ্রষ্টব্য। CA বাহু এবং BC ও BA বাহুদ্বয়ের বর্ধিত অংশ স্পর্শ করিয়া, AB বাহু এবং CA ও CB বাহুদ্বয়ের বর্ধিত অংশ স্পর্শ করিয়া, আরও দুইটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে। সুতরাং কোন ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

উপরের চিত্রে AI_1 সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যায় যে AI_1, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের দুইটি বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং তৃতীয় কোণের সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু, এবং উহাদের সম্পাত-বিন্দু একটি বহিঃকেন্দ্র হইবে।

সম্পাদ্য ২৮

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশ-কোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

[In a given circle to inscribe a triangle equiangular to a given triangle.]

মনে কর, ABC নির্দিষ্টবৃত্তের কেন্দ্র O এবং DEF নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

△ DEFএর সদৃশ-কোণ করিয়া বৃত্তটিতে একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু A লও,

AO সংযুক্ত কর, এবং PT, AOএর লম্ব টান।

∴ PT, ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক।

A বিন্দু হইতে AB জ্যা অঙ্কিত কর যেন, ∠PAB, ∠DFEএর সমান হয়;

এবং A বিন্দু হইতে AC জ্যা অঙ্কিত কর যেন, ∠TAC, ∠DEFএর সমান হয়।

BC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

প্রমাণ। PT, বৃত্তের একটি স্পর্শক,

সুতরাং ∠TAC = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ABC, [উপ ৪৯

এবং ∠PAB = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ACB,

কিন্তু $\angle TAC = \angle DEF$, [অঙ্কন

এবং $\angle PAB = \angle DFE$, ,,

$\therefore$ $\angle ABC = \angle DEF$,

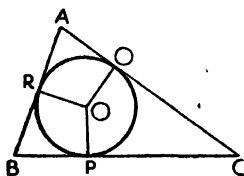
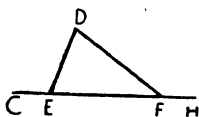
এবং $\angle ACB = \angle DFE$,

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAC$ = অবশিষ্ট $\angle EDF$ ।

$\therefore$ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$এর সহিত সদৃশ-কোণ, এবং উহা নির্দিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইয়াছে। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ২৯

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

[About a given circle to circumscribe a triangle equiangular to a given triangle.]

মনে কর, PQR নির্দিষ্ট বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র এবং DEF নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

PQR বৃত্তে পরিলিখিত করিয়া এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহা DEF ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ হয়।

অঙ্কন। EF বাহু G ও H পর্যন্ত উভয় দিকে বর্ধিত কর।

বৃত্তটিতে যে-কোন একটি ব্যাসার্ধ OP অঙ্কিত কর।

O হইতে ব্যাসার্ধ OR এবং OQ এইরূপ ভাবে টান যেন,

$\angle POR = \angle DEG$, এবং $\angle POQ = \angle DFH$ ।

এখন P, Q এবং R বিন্দুতে যথাক্রমে BC, CA এবং AB স্পর্শকত্রয় অঙ্কিত কর, উহারা ABC ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিল।

ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। ∠OPB এবং ∠ORB প্রত্যেকে সমকোণ,

∴ PORB চতুর্ভুজের অবশিষ্ট কোণদ্বয়.

∠POR এবং ∠PBR পরস্পর সম্পূরক।

কিন্তু ∠DEG এবং ∠DEF পরস্পর সম্পূরক।

এবং অঙ্কনানুযায়ী ∠POR = ∠DEG,

∴ উহাদের সম্পূরক ∠ABC = ∠DEF।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে ∠ACB = ∠DFE,

∴ অবশিষ্ট ∠BAC = অবশিষ্ট ∠EDF. ই. স. বি.

অনুশীলনী

১। একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির পরিমাণ 1·5″, 2″ এবং 2·8″ ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিয়া উহার অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর।

২। একটি ত্রিভুজের বাহু 3 সেঃ মিঃ, 3·5 সেঃ মিঃ এবং 4·5 সেঃ মিঃ, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিয়া উহার বহির্বৃত্তগুলি অঙ্কিত কর।

৩। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 1·5″, 2″ এবং 2·5″ ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিয়া উহার বাহুত্রয় (আবশ্যক হইলে বর্ধিত করিয়া) স্পর্শ করিয়া যতগুলি সম্ভব বৃত্ত অঙ্কিত কর।

(ক) প্রমাণ কর যে এই ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুটি উহার পরিবৃত্তের ব্যাস।

৪। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধের আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা বাহুগুলি হইতে সমান সমান জ্যা ছেদ করিবে।

৫। ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত BC বাহুকে D বিন্দুতে স্পর্শ করিলে,

প্রমাণ কর যে, BD এবং CDএর অন্তর AB এবং ACএর অন্তরের সমান।

৬। 1″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহার একটি অন্তর্লিখিত এবং একটি পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

দুই দশমিক পর্যন্ত উহাদের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে পরিলিখিত ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত ত্রিভুজের চতুর্গুণ।

৭। ABC ত্রিভুজের I অন্তঃকেন্দ্র এবং I_1, BC বাহুকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বহির্বৃত্তের বহিঃকেন্দ্র হইলে, প্রমাণ কর যে, A, I, I_1 একই সরল রেখার অন্তর্গত।

৮। একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার দুইটি কোণ 30° এবং 45° হয়।

৯। একটি বৃত্তের পরিলিখিত এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার দুইটি কোণ 60° এবং 30° হয়।

১০। কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ এবং উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকিলে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১১। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা এবং পরিব্যাসার্ধ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১২। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যেন উহার বাহুত্রয় তিনটি সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

১৩। যদি কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং পরিকেন্দ্রের সংযোজক-রেখা উহার কোন শীর্ষ দিয়া যায়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

১৪। যদি কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র একই বিন্দুতে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

১৫। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত—মনে কর, নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র O। O দিয়া AC এবং BD ব্যাসদ্বয়

পরস্পর লম্বভাবে অঙ্কিত কর। AB, BC, CD এবং DA সংযুক্ত কর। ABCD নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র।]

১৬। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

১৭। 2″ দীর্ঘ AB এর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

AB এর উপর E বিন্দু দেওয়া থাকিলে ঐ বর্গক্ষেত্রটির অন্তর্লিখিত করিয়া আর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর যেন উহার একটি কৌণিক বিন্দু E তে অবস্থিত হয়।

১৮। একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রে সর্বাপেক্ষা কম কালিবিশিষ্ট (Minimum Area) একটি বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত কর।

১৯। একটি বৃত্তপাদের (Quadrant) অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

২০। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র এবং সমবাহু ত্রিভুজের বাহু যথাক্রমে a এবং b হইলে, প্রমাণ কর যে $3a^2 = 2b^2$.

সুষম বহুভুজ-সম্বন্ধীয় বৃত্ত

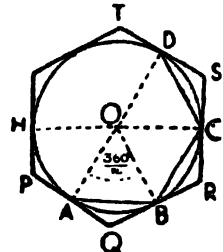
সম্পাদ্য ৩০

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের, (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To (1) inscribe, or (2) circumscribe, a regular polygon in a given circle.]

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত, এবং O উহার কেন্দ্র।

ইহাতে একটি n-সংখ্যক বাহু-বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত, এবং আর একটি পরিলিখিত করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর ABCD···একটি n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ বৃত্তটিতে অন্তর্লিখিত হইয়াছে।

∴ জ্যা AB = BC = CD·· ইত্যাদি

∴ চাপ AB = BC = CD···ইত্যাদি

∴ কেন্দ্রে $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD \cdots\cdots = \frac{360^\circ}{n}$

অতএব অঙ্কন-প্রণালীর ইঙ্গিত পাওয়া গেল।

(১) **অঙ্কন।** পরিধির যে-কোন বিন্দু A, Oএর সহিত সংযুক্ত কর। কেন্দ্রে AOএর সহিত $\frac{360^\circ}{n}$এর সমকোণ করিয়া OB ব্যাসার্ধ অঙ্কিত কর।

AB সংযুক্ত কর, এবং জ্যা ABএর সমান করিয়া BC, CD···ইত্যাদি জ্যাগুলি পর পর অঙ্কিত কর। তাহা হইলে বৃত্তটিতে n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হইবে।

প্রমাণ। $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD \ldots,$

∴ $\angle OAB + OBA = \angle OBC + \angle OCB = \angle OCD + \angle ODC \ldots$

কিন্তু $\angle OAB = \angle OBA$, $\angle OBC = \angle OCB$, $\angle OCD = \angle ODC$ ··

∴ $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = = \angle OCB = \angle OCD = \angle ODC \ldots$

∴ $\angle ABC = \angle BCD = \angle HAB = \cdots$

এবং অঙ্কনানুযায়ী AB = BC = CD = ··

∴ অন্তর্লিখিত ABCD...বহুভুজটি সুষম।

(২) ABCD...সুষম বহুভুজ বৃত্তের অন্তর্লিখিত করিয়া অঙ্কিত কর। A, B, C, D...বিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শক যথাক্রমে PQ, QR, RS, ST··· অঙ্কিত কর।

উহারা PQRST...বহুভুজটি উৎপন্ন করিল।

তাহা হইলে PQRST...নির্ণেয় পরিলিখিত সুষম বহুভুজ।

প্রমাণ। যেহেতু $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD \cdots$

∴ উহাদের সম্পূরক $\angle AQB = \angle BRC = \ldots$

আবার $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \ldots$

উহাদের পূরক $\angle QAB = \angle QBA = \angle RBC = \angle RCB = \cdots$

অর্থাৎ বহুভুজটির কোণগুলি পরস্পর সমান।

এবং $AB = BC = CD = \ldots$

$\therefore$ সর্বতোভাবে $\triangle QAB = \triangle RBC = \triangle SCD = \cdots$

$\therefore$ $AQ = BR,\ QB = RC,\ BR = CS,\ RC = SD, \cdots$

কিন্তু একবিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক

$AQ = QB,\ RB = RC,\ SC = SD\ldots$

$\therefore$ $AQ = QB = RB = RC = SC = SD = \cdots$

$\because$ $QB + BR = RC + CS\ldots$

$\therefore$ $QR = RS = \cdots$

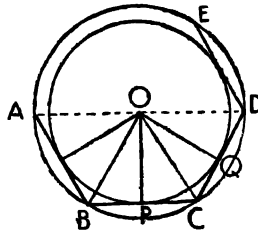
অর্থাৎ বহুভুজটির বাহুগুলি পরস্পর সমান।

$\therefore$ পরিলিখিত বহুভুজটি সুষম। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৩১

একটি সুষম বহুভুজের (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABCD ··· একটি n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ, এবং AB, BC, CD... ইহার বাহু।

এই সুষম বহুভুজটির (১) অন্তর্লিখিত, এবং (২) পরিলিখিত বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABC এবং BCD কোণদ্বয়কে BO এবং CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, O উভয় বৃত্তের কেন্দ্র হইল।

(১) O হইতে BC এর উপর OP লম্ব টান। O কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহাই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। OD সংযুক্ত কর।

OCB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয়ের

$BC = CD$,

OC সাধারণ বাহু।

এবং $\angle OCB = \angle OCD$,

$\therefore \angle OBC = \angle ODC$। (উপ ৪)

কিন্তু $\angle B = \angle D$

এবং $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle B$,

$\therefore \angle ODC = \frac{1}{2} \angle D$,

$\therefore$ OD, $\angle D$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, বহুভুজটির কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকগুলি O বিন্দুতে মিলিত হইবে।

অতএব, O বিন্দু বহুভুজের বাহু AB, BC, CD···হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং O কেন্দ্র করিয়া OB ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত AB, BC, CD··· প্রভৃতি বহুভুজের বাহুগুলিকে স্পর্শ করিবে; অতএব ইহাই নির্ণেয় অন্তর্লিখিত বৃত্ত।

(২) **প্রমাণ।** যেহেতু $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D \cdots\cdots$।

এবং OA, OB, OC, OD···যথাক্রমে উহাদের সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \angle OAB = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCD = \angle ODC = \cdots$

$\therefore OA = OB = OC = OD = \cdots$

অতএব O কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি B,C,D...দিয়া যাইবে।

সুতরাং এই বৃত্তই বহুভুজটির পরিলিখিত বৃত্ত। ই. স. বি.

অনুশীলনী

১। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম ষড়্‌ভুজ অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত কর।

[সঙ্কেত — $\frac{৩৬০°}{৬} = 60°$। সুতরাং কেন্দ্রে 60° এর সমান করিয়া ∠AOB অঙ্কিত কর। AB অন্তর্লিখিত ষড়্‌ভুজের একটি বাহু। ইত্যাদি]

২। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে (১) আট বাহু এবং (২) দ্বাদশ বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত কর।

[সঙ্কেত—$\frac{৩৬০°}{৮} = 45°$; $\frac{৩৬০°}{১২} = 30°$।]

৩। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম ষড়-ভুজের কালি উহার পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজের তিন-চতুর্থাংশ।

৪। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ ত্রিভুজের উচ্চতার এক-তৃতীয়াংশ।

৫। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে, উহার পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

৬। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং একটি সুষম ষড়্‌ভুজের বাহু যথাক্রমে a ও b হইলে, প্রমাণ কর যে,

(১) ষড়্‌ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। [ক. প্র.

(২) $a^2 = 3b^2$.

৭। একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন প্রত্যেকটি কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ হইলে, প্রমাণ কর যে, ভূমিটি ঐ বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের একটি বাহু।

৮। একটি রম্বসের অন্তর্বৃত্তের ব্যাস উহার উন্নতির সমান।

৯। কোন অর্ধবৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

১০। কোন বর্গক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত এমন একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি শীর্ষ (১) বর্গক্ষেত্রের কোন শীর্ষে থাকিবে ও (২) বর্গক্ষেত্রের কোন বাহুর মধ্যবিন্দুতে থাকিবে।

বৃত্তের ব্যাস ও পরিধি

সূতাদ্বারা কয়েকটি বৃত্তের পরিধির মাপ লও এবং উহাদের প্রত্যেকটির ব্যাসের মাপ লও। এখন প্রত্যেক বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্যকে উহার ব্যাসদ্বারা ভাগ করিলে দেখা যাইবে যে প্রত্যেক স্থলেই ভাগফলের আসন্নমান (Approximate value) $\frac{22}{7}$ হইবে।

অর্থাৎ $\dfrac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{উহার ব্যাস}} = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

ইহার আসন্নমান দশমিকের পর সপ্তম স্থান পর্যন্ত 3·1415926 নির্ণীত হইয়াছে; কিন্তু $3\frac{1}{7} = 3{\cdot}142857$, সুতরাং $3\frac{1}{7}$ লইলে প্রকৃত মান অপেক্ষা কিছু বেশী লওয়া হয়।

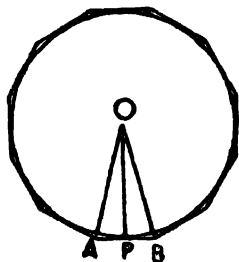
বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

সুতরাং $\dfrac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$

$\therefore$ পরিধি $= \pi \times$ ব্যাস $= \pi \times 2r = 2\pi r$ ($r =$ ব্যাসার্ধ)

এই স্থলে π এর মান 3·1415926, কিংবা 3·1416, কিংবা 3·142 লিখিলে সাত দশমিক, চারি দশমিক কিংবা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান শুদ্ধ হইবে।

বৃত্তের কালি (ক্ষেত্রফল)

মনে কর, কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং উহার ব্যাসার্ধ r. AB, এই বৃত্তের পরিলিখিত n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের বাহু বৃত্তটিকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

বহুভুজটির কালি $= n \triangle OAB = n.\frac{1}{2}AB.r$

$= \frac{1}{2}r.n.AB$

$= \frac{1}{2}r$. বহুভুজের পরিসীমা।

বাহুর সংখ্যা যতই হউক, এই সূত্রটি সর্বদা সত্য। অতএব বাহুর সংখ্যা যতই বর্ধিত করা হইবে, ততই বহুভুজটি বৃত্তের সন্নিকটবর্তী হইবে এবং বহুভুজ ও বৃত্তের কালির অন্তর ততই ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। সুতরাং চরমাবস্থায় বাহুর সংখ্যা অগণিত হইলে উহাদের অন্তর এত ক্ষুদ্রতম হইবে যে তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর রাশি কল্পনা করা যায় না। কাজেই এই অবস্থায় বহুভুজের পরিসীমা বৃত্তের পরিধির সমান ধরা যাইতে পারে। অতএব বহুভুজ এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

$\therefore$ **বৃত্তের কালি $= \frac{1}{2}$r.বৃত্তের পরিধি $= \frac{1}{2}r.2\pi r = \pi r^2$**

বৃত্তকলার কালি

কোন বৃত্তকলার কোণ 1° হইলে,

উহার চাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{360} \times$ (বৃত্তের পরিধি),

এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{360} \times$ (বৃত্তের ক্ষেত্রফল)।

অতএব কোন বৃত্তকলার কোণ D° হইলে,

উহার চাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{D}{360} \times$ (বৃত্তের পরিধি) $= \frac{D}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{\pi D}{180} r$

এবং উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{D}{360}\times$(বৃত্তের কালি) $=\frac{D}{360}\times\frac{1}{2}$(বৃত্তের পরিধি) $\times r$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{D}{360}\times\right.$ বৃত্তের পরিধি $\left.\right)\times r$

$=\frac{1}{2}\times$(বৃত্তকলার চাপ) $\times r$.

বৃত্তকলাটি OACB, কেন্দ্র O, OA এবং OB ব্যাসার্ধ ধরিয়া লইলে, ACB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল − △OABএর ক্ষেত্রফল।

অনুশীলনী

১। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1″, 2″, 2·5″, .4″, 8″ হইলে উহাদের পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। বৃত্তের ব্যাস 1·6″, 2·8″, 5″, 6″ হইলে উহাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

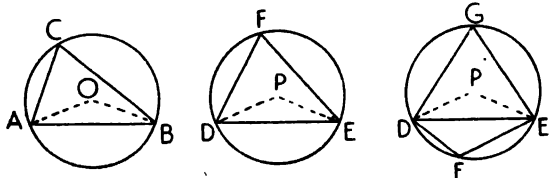
৩। বৃত্তকলার সীমান্ত ব্যাসার্ধ দুইটির অন্তর্গত কোণ 30°, 45°, 60° এবং 90° হইলে এবং উহাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1″, 1·5″, 2·4″ এবং 4″ হইলে, উহাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বৃত্ত এবং ত্রিভুজ-সম্বন্ধীয় বিবিধ উপপাদ্য

১। সমান সমান ভূমিস্থিত দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় পরস্পর সমান কিংবা সম্পূরক হইলে, উহাদের পরিবৃত্তদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

[If two triangles stand on equal bases and have their vertical angles either equal or supplementary, then their circumferences are equal.]

মনে কর, AB ও DE সমান সমান ভূমির উপর △CAB এবং △FDE দণ্ডায়-

মান, এবং উহাদের শিরঃকোণদ্বয় C এবং F হয় (১) সমান, না হয় (২)সম্পূরক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদের পরিবৃত্ত দুইটি পরস্পর সমান।

অঙ্কন। CAB এবং FDE ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত দুইটি অঙ্কিত কর। O ও P যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র। OA ও OB, এবং PD ও PE সংযুক্ত কর। তৃতীয় চিত্রে অনুবন্ধী চাপে (conjugate arc) একটি বিন্দু G লইয়া GD এবং GE সংযুক্ত কর।

(১) $\angle ACB = \angle DFE$,

কিন্তু $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\angle DFE = \angle DPE$,

$\therefore \angle OAB + \angle OBA = \angle PDE + \angle PED$।

কিন্তু OA = OB, এবং PD = PE, (ব্যাসার্ধ)

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$, এবং $\angle PDE = \angle PED$,

$\therefore 2\angle OAB = 2\angle PDE \quad \therefore \angle OAB = \angle PDE$,

এবং $\angle OBA = \angle PED$।

এখন OAB এবং PDE ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle OAB = \angle PDE$, $\angle OBA = \angle PED$, এবং AB = DE ;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; সুতরাং ব্যাসার্ধ OA = ব্যাসার্ধ PD.

$\therefore \odot CAB = \odot FDE$।

(২) তৃতীয় চিত্রে $\angle DGE$ এবং $\angle DFE$ পরস্পর সম্পূরক,

কিন্তু $\angle ACB$ এবং $\angle DFE$ পরস্পর সম্পূরক, (কল্পনা)

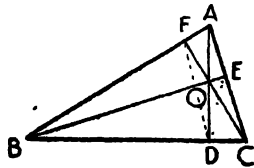
$\because \angle DGE = \angle ACB$.

$\therefore$ (১) এর প্রমাণ অনুসারে $\odot CAB = \odot FDE$। ই. উ. বি.

লম্ববিন্দু

২। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় একবিন্দুগামী।

[In any triangle the perpendiculars drawn from the vertices to the opposite sides are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A এবং B হইতে বিপরীত বাহু BC ও CAএর উপর যথাক্রমে AD ও BE লম্ব অঙ্কিত হইল। উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল। CO সংযুক্ত কর, উহা বর্ধিত হইয়া ABকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CF, ABএর লম্ব।

প্রমাণ। DE সংযুক্ত কর।

$\angle D$ এবং $\angle E$ প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ D, O, E এবং C একবৃত্তস্থ,

$\therefore \angle OED = \angle OCD$;

আবার, $\angle AEB =$ এক সমকোণ $= \angle ADB$,

$\therefore$ A, E, D এবং B একবৃত্তস্থ।

$\therefore \angle BAD = \angle BED = \angle OED = \angle OCD$।

এবং $\angle AOF =$ বিপ্রতীপ কোণ COD; সুতরাং AOF এবং COD ত্রিভুজদ্বয়ের অবশিষ্ট কোণ AFO = অবশিষ্ট কোণ CDO = এক সমকোণ।

$\therefore$ CF, ABএর উপর লম্ব।

সুতরাং লম্বত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল; অতএব উহারা এক-বিন্দুগামী। ই. উ. বি.

এই উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ ১২১ পৃষ্ঠায় (উপ ৪) দেওয়া হইয়াছে।

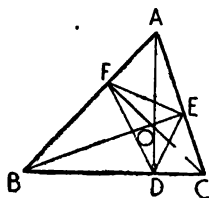
সংজ্ঞা। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে **লম্ববিন্দু** (Orthocentre) বলে। চিত্রে O লম্ববিন্দু।

ত্রিভুজের লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুর সংযোজক সরল রেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজকে **পাদত্রিভুজ** (Pedal Triangle) বলে। উপরের চিত্রে, DE, EF এবং FD সংযুক্ত করিলে, পাদ-ত্রিভুজ DEF উৎপন্ন হইবে।

৩। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব, পাদত্রিভুজের কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[In an acute angled triangle, the perpendiculars drawn from the vertices to the opposite sides, bisect the angles of the pedal triangle.]

মনে কর, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের AD, BE ও CF যথাক্রমে BC, CA এবং ABএর উপর লম্ব টানা হইল।

A
F
E
O
B D C

DE, EF, FD সংযুক্ত কর। অতএব DEF পাদত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD, BE এবং CF যথাক্রমে $\angle FDE, \angle DEF$ এবং $\angle EFD$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ। মনে কর, O লম্ববিন্দু।

$\angle OEC + \angle ODC$ = দুই-সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C এবং E বিন্দু-চতুষ্টয় সমবৃত্ত হইবে।

$\therefore \angle ODE = \angle OCE$।

এবং $\angle OFB + \angle ODB$ = দুই সমকোণ।

$\therefore$ B, D, O, F বিন্দু-চতুষ্টয় সমবৃত্ত হইবে।

$\therefore \angle ODF = \angle OBF$।

আবার $\angle BFC$ এবং $\angle BEC$ প্রত্যেকে সমকোণ।

$\therefore$ B, C, E এবং F বিন্দু-চতুষ্টয় সমবৃত্ত।

$\therefore \angle FCE = \angle FBE$,

$\therefore \angle ODE = \angle ODF$,

সুতরাং AD, $\angle FDE$এর সমদ্বিখণ্ডক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, BE এবং CF যথাক্রমে ∠DEF এবং ∠EFDএর সমদ্বিখণ্ডক। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু উহার পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

[The orthocentre of a triangle is the in-centre of the pedal triangle.]

অনুসিদ্ধান্ত ২। পাদত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহু মূল ত্রিভুজের যে-বাহুর উপর মিলিত হয়, সেই বাহুর সহিত সমভাবে নত হইয়া থাকে। অর্থাৎ ঐ বাহুর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। এই উপপাদ্যের চিত্রের BDF, EAF এবং EDC ত্রিভুজ-ত্রয় পরস্পর এবং △ABCএর সহিত সদৃশ-কোণ।

৪। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে যে-কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজের পরিবৃত্ত পর্যন্ত বর্ধিত হইলে উহা ঐ বাহুদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

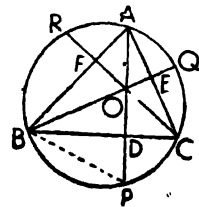
[The perpendicular drawn from the orthocentre of a triangle to one of its sides and produced to meet its circum-circle is bisected by that side.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AD, BE, CF লম্বত্রয় লম্ববিন্দু O তে ছেদ করিয়াছে। ত্রিভুজেব পরিবৃত্ত PQR অঙ্কিত কর, এবং লম্বত্রয় বর্ধিত হইয়া যথাক্রমে P, Q এবং R বিন্দুতে পরিবৃত্তকে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP, OQ এবং OR, যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

BP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∠ODC + ∠OEC = দুই সমকোণ,

∴ ∠ECD = ∠DOEএর সম্পূরক
= ∠BOD।

কিন্তু, একই বৃত্তাংশে অবস্থিত ∠APB = ∠ACB = ∠ECD = ∠BOD।

BOD এবং BPD ত্রিভুজদ্বয়ের

∠BDO = ∠BDP, (সমকোণ)

$\angle BOD = \angle BPD$, (প্রমাণিত)

এবং BD সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ DO = DP.

এইরূপে প্রমাণ করা যায়, OE = EQ, এবং OF = FR. ই. উ. বি.

৫। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে কোন শীর্ষের দূরত্ব উহার পরিকেন্দ্র হইতে বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।

[The distance of a vertex of a triangle from the orthocentre is double of the distance of the opposite side from its circum-centre.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের, A, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্ব অঙ্কিত হইল এবং O উহার লম্ববিন্দু।

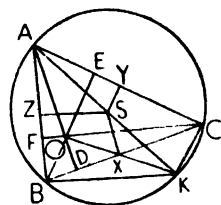
মনে কর, S ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, S হইতে SX, SY এবং SZ যথাক্রমে BC, CA এবং ABএর উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AO = 2SX, BO = 2SY এবং CO = 2SZ.

অঙ্কন। A হইতে AK ব্যাস অঙ্কিত কর। BK, CK, OK সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। S পরিকেন্দ্র এবং SX, BC জ্যা এর লম্ব,

∴ X, BCএর মধ্যবিন্দু ;

এইরূপ, Y এবং Z যথাক্রমে CA এবং ABএর মধ্যবিন্দু।

অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ABK$ = এক সমকোণ = $\angle AFC$,

∴ CF, অর্থাৎ CO, BKএর সমান্তরাল।

আবার অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACK$ = এক সমকোণ = $\angle AEB$.

∴ BE, অর্থাৎ BO, CKএর সমান্তরাল।

∴ BOCK একটি সামন্তরিক।

∴ ইহার কর্ণদ্বয় BC এবং OK ছেদবিন্দুতে পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

অর্থাৎ OK, BCএর মধ্যবিন্দু X দিয়া যাইবে।

এখন, AOK ত্রিভুজে, S এবং X যথাক্রমে KA এবং KO বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ $SX = \frac{1}{2}AO$. $AO = 2SX$.

এইরূপ, $BO = 2SY$ এবং $CO = 2SZ$. ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O হইলে, প্রমাণ কর $\angle BAC$ এবং $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক।

২। ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, এবং A হইতে পরিবৃত্তের ব্যাস AK অঙ্কিত হইল; প্রমাণ কর যে, BOCK একটি সামন্তরিক, এবং OK, BCএর সমদ্বিখণ্ডক। (২৪৯ পৃষ্ঠার ৫ প্রতিজ্ঞা দেখ)।

৩। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা বর্ধিত হইয়া উহার পরিবৃত্তকে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, শীর্ষ হইতে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসটি পরিবৃত্তকে যে-বিন্দুতে ছেদ করে, এই রেখাও সেই বিন্দুতে উহাকে ছেদ করিবে।

৪। ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব এবং লম্ববিন্দু ও উক্ত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা বর্ধিত করিলে উহারা পরিবৃত্তকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাদের সংযোজক রেখা ভূমির সমান্তরাল।

৫। ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু হইলে, A, B, C এবং O বিন্দুচতুষ্টয়ের যে-কোন একটি বিন্দু, অপর তিনবিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

৬। কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ এবং লম্ববিন্দুদিয়া অঙ্কিত বৃত্তত্রয়ের প্রত্যেকে উহার পরিবৃত্তের সমান।

৭। কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ এবং লম্ববিন্দু দিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু-সংযোগে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, উহা ও মূল ত্রিভুজটি সর্বসম হইবে।

৮। ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু, লম্ববিন্দু এবং পরিকেন্দ্র দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা এবং পরিকেন্দ্র দেওয়া আছে. ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

১০। প্রমাণ কর যে, একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং শীর্ষত্রয় যথাক্রমে পাদ-ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং বহিঃকেন্দ্রত্রয়।

১১। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয় পাদ-ত্রিভুজের কোণত্রয়ের বহিঃ-সমদ্বিখণ্ডক ; এবং স্থূলকোণী ত্রিভুজের, স্থূলকোণ-উৎপন্নকারী বাহুযুগল পাদ-ত্রিভুজের দুইটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক।

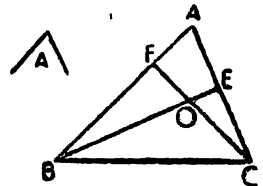
১২। ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দু সমরেখ।

[মনে কর, ABC ত্রিভুজের S পরিকেন্দ্র, O লম্ববিন্দু এবং X, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। SA, OS এবং AX সংযুক্ত কর, AX,OSকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। AG এবং OG এর মধ্যবিন্দু H ও K সংযুক্ত কর। SH, XK সংযুক্ত কর। HK, AO এর সমান্তরাল এবং AOএর অর্ধ ; SX, AO এর সমান্তরাল ও উহার অর্ধ, ∴ HK এবং SX পরস্পর সমান্তরাল ও সমান, অতএব SHKX একটি সামন্তরিক, সুতরাং উহার কর্ণদ্বয় G বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। ∵ XG = GH = HA। ∴ G ভরকেন্দ্র, এবং SOএর উপর অবস্থিত। ∴ O, G এবং S সমরেখ।]

সঞ্চার-পথ

১। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, লম্ববিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

[Given the base and the vertical angle of a triangle. find the locus of its orthocentre.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ভূমি BC এবং শিরঃ-কোণ A দেওয়া আছে। B এবং C হইতে যথাক্রমে AC এবং ABএর উপর BE এবং CF লম্ব টান, উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল। সুতরাং O লম্ববিন্দু।

O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ। $\angle AEO + \angle AFO =$ দুই সমকোণ,

$\therefore$ $\angle EOF + \angle FAE =$ দুই সমকোণ $= 180°$,

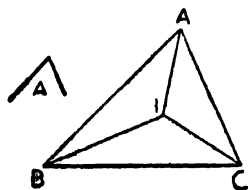
$\therefore$ $\angle BOC = \angle EOF = 180° - \angle FAE = 180° - A$.

কিন্তু $\angle A$ ধ্রুব ;

$\therefore$ ইহার সম্পূরক $\angle BOC$ও ধ্রুব।

সুতরাং, BC জ্যার উপর অঙ্কিত একটি বৃত্তখণ্ডের চাপ, যাহার বৃত্তাংশস্থ কোণ $= 180° - A$, অভীষ্ট সঞ্চারপথ হইবে। ই. স. বি.

২। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ দেওয়া আছে, উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

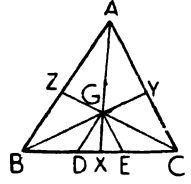
[Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its in-centre.]

মনে কর, BC নির্দিষ্ট ভূমি এবং নির্দিষ্ট $\angle A$এর সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট ABC একটি ত্রিভুজ। BI এবং CI, যথাক্রমে $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I বিন্দুতে ছেদ করিল ; সুতরাং I অন্তঃকেন্দ্র। I এর সঞ্চার-পথ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ। পূর্ব্বে প্রমাণিত হইয়াছে,

$$\angle BIC = 90° + \frac{A}{2} = \text{ধ্রুব।}$$

$\therefore$ BC জ্যার উপর অঙ্কিত চাপ, যাহার বৃত্তাংশস্থ কোণ $90° + \frac{A}{2}$ অভীষ্ট সঞ্চারপথ হইবে। ই. স. বি.

৩। একটি ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ দেওয়া আছে, উহার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, নির্দিষ্ট ভূমি BCএর উপর এবং নির্দিষ্ট শিরঃকোণ $\angle A$-বিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের AX, BY এবং CZ মধ্যমাত্রয় উহার ভরকেন্দ্র G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

G বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AB এবং AC এর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে GD এবং GE টান, উহারা BC:কে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। $GZ = \frac{1}{3} CZ$, এবং GD, BZএর সমান্তরাল।

$\therefore$ $BD = \frac{1}{3} BC$।

এইরূপ, $CE = \frac{1}{3} BC$।

সুতরাং D এবং E, BC এর উপর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

আবার DG এবং EG যথাক্রমে BA এবং CAএর সমান্তরাল,

$\therefore$ $\angle DGE = \angle BAC$।

$\therefore$ G বিন্দুর অবস্থান যেখানেই হউক না কেন $\angle DGE$ সর্বাবস্থায়ই $\angle A$ এর সমান।

$\therefore$ DEএর উপর অঙ্কিত $\angle A$-বিশিষ্ট বৃত্তাংশই অভীষ্ট সঞ্চারপথ।

ই. স. বি.

অনুশীলনী

১। ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, শিরঃকোণের বিপরীত বহিঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর P এবং Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB উহার একটি ব্যাস, PA এবং QB এর ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। নির্দিষ্ট সরলরেখা AB এর প্রান্তবিন্দু দিয়া AC এবং BD সমান্তরাল রেখাদ্বয় অঙ্কিত হইল। $\angle BAC$ এবং $\angle ABD$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। কোন বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অঙ্কিত জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

নির্দিষ্ট বিন্দুটি পরিধির বাহিরে, উপরে অথবা অভ্যন্তরে থাকিলে, বিভিন্ন অবস্থানের প্রভেদ নির্দেশ কর।

৫। দুইটি বৃত্ত A এবং B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। একটি বৃত্তের পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু P হইতে PA, PB (আবশ্যক হইলে বর্ধিত করিয়া) অপর বৃত্তটিকে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করিল। AR এবং BQএর ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও বহির্বৃত্ত

১। ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I, এবং বাহুগুলির সহিত উহার স্পর্শবিন্দু D, E ও F এবং BC বাহুকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1 এবং স্পর্শবিন্দু D_1, E_1 এবং F_1 ;

$s =$ অর্ধপরিসীমা $= \frac{1}{2}(a+b+c)$,

অন্তর্বৃত্তের ব্যাস $= r$,

বহির্বৃত্তের ব্যাস $= r_1$.

প্রমাণ কর যে,

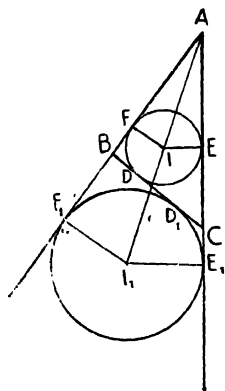
(১) $AE = AF = s - a$; $BD = BF = s - b$;
$CD = CE = s - c$.

(২) $AE_1 = AF_1 = s$.

(৩) $CD_1 = CE_1 = s - b$; $BD_1 = BF_1 = s - c$

(৪) $CD = BD_1$; $BD = CD_1$.

(৫) $EE_1 = FF_1 = a$.

(৬) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= rs = r_1(s-a)$.

(১) $\because$ AE = AF, CE = CD, এবং BD = BF

$\therefore$ $AE + CD + BD = \frac{1}{2}(AE + CE + CD + BD + AF + BF)$
$= \frac{1}{2}(CA + BC + AB) = \frac{1}{2}(a + b + c) = s.$

$\therefore$ $AE = AF = \frac{1}{2}(AE + AF) = \frac{1}{2}(AC - CE + AB - BF)$
$= \frac{1}{2}\{AC + AB - (CD + BD)\}$
$= \frac{1}{2}(b + c - a) = \frac{1}{2}(2s - 2a) = s - a.$

এইরূপ, $BD = BF = s - b$, এবং $CD = CE = s - c$.

(২) $CD_1 = CE_1$, $BD_1 = BF_1$ এবং $AE_1 = AF_1$

$\therefore$ $AE_1 = AF_1 = \frac{1}{2}(AE_1 + AF_1) = \frac{1}{2}(AC + CE_1 + AB + BF_1)$
$= \frac{1}{2}(AB + AC + CD_1 + BD_1)$
$= \frac{1}{2}(a + b + c) = s.$

(৩) $CD_1 = CE_1 = AE_1 - AC = s - b.$

এইরূপ, $BD_1 = BF_1 = s - c$

(৪) $CD = s - c = BD_1.$
$CD_1 = s - b = BD.$

(৫) $EE_1 = AE_1 - AE = s - (s - a) = a$
$FF_1 = AF_1 - AF = s - (s - a) = a$
$\therefore$ $EE_1 = FF_1 = a.$

(৬) $\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$
$= \frac{1}{2}r.a + \frac{1}{2}r.b + \frac{1}{2}r.c = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}r.2s = rs.$

আবার $\triangle ABC = \triangle I_1CA + \triangle I_1AB - \triangle I_1BC$
$= \frac{1}{2}r_1b + \frac{1}{1}r_1c - \frac{1}{2}r_1a = \frac{1}{2}r_1(b + c - a)$
$= \frac{1}{2}r_1(2s - 2a) = r_1(s - a)$

দ্রষ্টব্য। $\angle C$ সমকোণ হইলে, CDIE একটি আয়তক্ষেত্র,

$\therefore$ $r = IE = CD = s - c$

এবং $CD_1I_1E_1$ একটি আয়তক্ষেত্র,

$\therefore$ $r_1 = I_1E_1 = CD_1 = s - b.$

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের I অন্তঃকেন্দ্র এবং I_1, I_2, I_3 যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহু স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বহিঃবৃত্তের কেন্দ্রত্রয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (১) A, I, এবং I_1 সমরেখ ; এইরূপ B, I, I_2, এবং C, I, I_3.

(২) I_2, A, I_3, সমরেখ ; এইরূপ I_3, B, I_1, এবং I_1,C, I_2.

(৩) BI_1C, CI_2A এবং AI_3B ত্রিভুজত্রয় পরস্পর সদৃশকোণ।

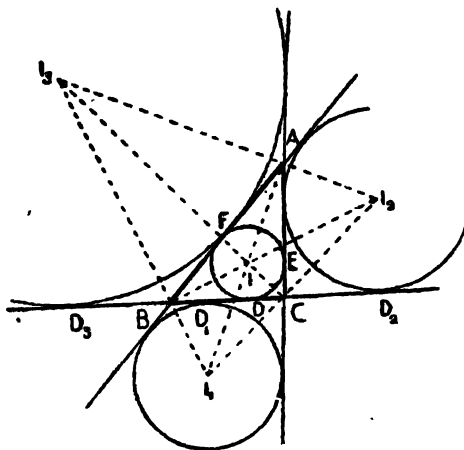
(৪) $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজটি অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ।

(৫) I, I_1, I_2, এবং I_3 বিন্দুচতুষ্টয়ের প্রত্যেকটি, অপর তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু।

(৬) I, I_1, I_2, I_3 বিন্দুসমূহের তিন তিনটির মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত-চতুষ্টয় পরস্পর সমান।

(৭) অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2 ও r_3 হইলে,

$$rs = r_1 (s-a) = r_2 (s-b) = r_3 (s-c)$$

$$\text{এবং } \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}.$$

(৮) $DD_2 = D_1D_3 = b$; $DD_3 = D_1D_2 = c$; $D_2D_3 = b + c$ এবং $DD_1 = b \backsim c$.

(৯) পরিবৃত্তের পরিধি II_1, II_2 এবং II_3 কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

২। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং শীর্ষত্রয় যথাক্রমে উহার পাদ-ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং বহিঃকেন্দ্রত্রয়।

৩। ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং ভূমির সহিত অন্তর্বৃত্ত কিংবা বহির্বৃত্তের স্পর্শবিন্দু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪। ত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্রত্রয় দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং দুইটি বহিঃকেন্দ্র দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

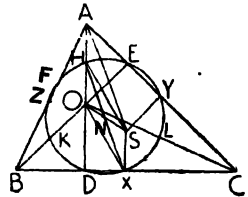
৬। তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু কেন্দ্র করিয়া এইরূপভাবে তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহাদের প্রত্যেক দুইটি পরস্পর স্পর্শ করে। ইহার কত প্রকারের সমাধান হইতে পারে ?

নব-বিন্দুগামী বৃত্ত

১। যে কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের তিনটি মধ্যবিন্দু, শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের তিনটি পাদবিন্দু এবং শীর্ষ ও লম্ববিন্দুর সংযোজক-রেখাত্রয়ের তিনটি মধ্যবিন্দু, এই নয়টি বিন্দু একবৃত্তস্থ হইবে।

[In any triangle, the middle points of the sides, the feet of the perpendiculars from the vertices to the opposite sides, and the middle points of the lines joining the orthocentre to the vertices, are concyclic.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের X, Y, Z বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু, D, E, F লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু এবং H, K, L শীর্ষ ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, X, Y এবং Z দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত, H, K, L এবং D, E, F দিয়াও যাইবে।

অঙ্কন। ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S লও।

SA, SH, SO, SX, OX এবং HX সংযুক্ত কর।

HX যেন SOকে N বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। SX, AOএর সমান্তরাল এবং অর্ধ,

∴ SX ও OH সমান এবং সমান্তরাল,

∴ OX এবং SH সমান এবং সমান্তরাল।

∴ OXSH একটি সামন্তরিক, এবং উহার কর্ণদ্বয় OS এবং HX পরস্পর N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

সুতরাং N, HXএর মধ্যবিন্দু।

এইরূপে N, KY ও LZএর মধ্যবিন্দু।

HDX একটি সমকোণ, অতএব HX ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়া যাইবে। এবং ND = NX = NH (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)।

আবার SX, AHএর সমান ও সমান্তরাল,

∴ HX = SA = পরিব্যাসার্ধ (R),

∴ $ND = NH = NX = \frac{1}{2} R$;

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$NE = NK = NY = \frac{1}{2} R$;

এবং $NF = NL = NZ = \frac{1}{2} R$;

∴ ND = NE = NF = NX = NY = NZ = NH = NK = NL.

সুতরাং N কেন্দ্র করিয়া NX ($= \frac{1}{2}$ R) ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি X, Y, Z, D, E, F এবং H, K, L এই নব-বিন্দু দিয়া যাইবে। ই. উ. বি.

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয় লম্বগুলির পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাগুলির মধ্যবিন্দুত্রয়, এই নয় বিন্দু দিয়া

অঙ্কিত বৃত্তকে **নব-বিন্দুগামী বৃত্ত** (Nine-points circle) বলে এবং উহার কেন্দ্রকে **নববিন্দু কেন্দ্র** (Nine-points centre) বলে।

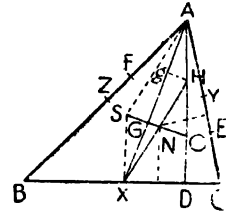
অনুসিদ্ধান্ত ১। নববিন্দু কেন্দ্র, পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দু হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিব্যাসার্ধের অর্ধ।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। AOB, BOC, COA এবং ABC ত্রিভুজ-চতুষ্টয়ের একই নববিন্দু। কারণ, AO, BO ও ABএর মধ্যবিন্দু H, K ও Z দিয়া অঙ্কিত বৃত্তই AOB ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্ত এবং ABC ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তও এই তিন বিন্দু দিয়া যায়।

২। ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, নব-বিন্দুকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ABC ত্রিভুজের S, N এবং O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র, নববিন্দুকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দু।

X, BCএর মধ্যবিন্দু ; AX সংযুক্ত কর, উহা যেন OSকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে G ভরকেন্দ্র।

N, OSএর মধ্যবিন্দু। AOএর মধ্যবিন্দু H হইতে OGএর সমান্তরাল করিয়া Hg টান যেন উহা AXকে g বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। এখন H, AOএর মধ্যবিন্দু এবং Hg, OGএর সমান্তরাল।

∴ g, AGএর মধ্যবিন্দু। ∴ $Ag = gG$.

আবার N, HXএর মধ্যবিন্দু এবং NG, Hgএর সমান্তরাল,

∴ G, gXএর মধ্যবিন্দু ;

∴ $gG = GX$ ∴ $Ag = gG = GX$.

∴ $AG = \frac{2}{3} AX$.

∴ G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। ই, উ. বি.

৩। সিম্‌সনের রেখা (Simson's Line)

কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের যে-কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে।

[The feet of the perpendiculars drawn from any point on the circum-circle of a triangle to the sides are in the same straight line.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধির উপর O একটি বিন্দু।

O হইতে OP, OQ এবং OR, যথাক্রমে BC, CA এবং বর্ধিত ABএর উপর লম্ব টানা হইল।

PQ, QR সংযুক্ত কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ এবং QR একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ। OA এবং OC সংযুক্ত কর।

$\angle OQA$ এবং $\angle ORA$, প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ OQAR একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore$ $\angle OQR = \angle OAR = \angle OAB$এর সম্পূরক $= \angle BCO$, কারণ ABCO একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

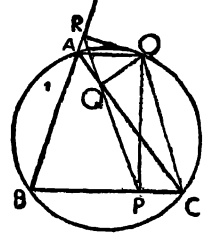
কিন্তু $\angle CPO = \angle CQO$ (সমকোণ),

$\therefore$ P,C,O, এবং Q একবৃত্তস্থ হইবে,

$\therefore$ $\angle BCO = \angle PCO = \angle PQO$এর সম্পূরক।

$\therefore$ $\angle OQR = \angle PQO$এর সম্পূরক।

$\therefore$ QP এবং QR একই সরলরেখায় অবস্থিত। ই. উ. বি.

সংজ্ঞা। এস্থলে PQR সরলরেখাটিকে O বিন্দুর সিম্‌সনের রেখা বা **পাদরেখা** (Pedal Line) বলা হয়।

অনুশীলনী

(বিবিধ প্রশ্ন)

১। দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পর ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণ উহাদের দ্বারা ছিন্ন চাপদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধাংশের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের সমান হইবে।

২। দুইটি জ্যা বৃত্তের বাহিরে ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণ উহাদের দ্বারা ছিন্ন চাপদ্বয়ের অন্তরের অর্ধাংশের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের সমান হইবে।

৩। পরস্পর অসমান্তরাল তিনটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ?

৪। ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $90^\circ-\frac{A}{2}$, $90^\circ-\frac{B}{2}$ এবং $90^\circ-\frac{C}{2}$ হইবে।

৫। ABC ত্রিভুজের I এবং S অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র হইলে, প্রমাণ কর যে, $\angle IAS=\frac{1}{2}\ (B-C)$;

এবং AD, BCএর উপর লম্ব টানিলে, AI, $\angle DAS$এর সমদ্বিখণ্ডক।

৬। ভূমি, উচ্চতা এবং পরিকেন্দ্র দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৭। A, B এবং C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত দুই দুইটি করিয়া পরস্পর D, E এবং F বিন্দুত্রয়ে বহিঃস্পর্শ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত DEF ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

৮। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর O বিন্দু হইতে BC ও AC বাহুর উপর যথাক্রমে OP এবং OQ লম্ব অঙ্কিত করিলে এবং বর্ধিত PQ, ABকে R বিন্দুতে ছেদ করিলে, OR, ABএর লম্ব হইবে।

৯। কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদত্রয় সমরেখ হইলে, বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১০। ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ দেওয়া আছে, উহার নববিন্দু-কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১১। I, I_1, I_2, I_3, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং বহিঃকেন্দ্র হইলে, ত্রিভুজটির পবিবৃত্তই ঐ বিন্দুচতুষ্টয়ের যে-কোন তিন বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের নববিন্দু-বৃত্ত।

১২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত—মূল ত্রিভুজের বাহুগুলি পাদ-ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহিঃদ্বিখণ্ডক।]

১৩। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং পরিবৃত্ত নির্দিষ্ট থাকিলে, উহার নববিন্দু-বৃত্তও নির্দিষ্ট থাকিবে।

১৪। কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থিত যে-কোন দুইবিন্দু P ও Qএর পাদরেখাদ্বয়ের (Simson's Line) মধ্যবর্তী কোণ PQ চাপ কর্তৃক পরিধিতে উৎপন্ন কোণেব সমান।

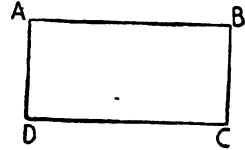
১৫। বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সমকোণে ছেদ করিলে, ছেদবিন্দু হইতে কোন বাহুর উপর লম্ব টানিয়া বর্ধিত করিলে, উহা বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। এবং বিপরীত ক্রমে, ঐ ছেদবিন্দু এবং যে-কোন বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক-রেখা বিপরীত বাহুর উপর লম্ব হইবে।

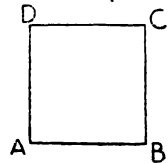
চতুর্থ খণ্ড

আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র এবং বহুভুজক্ষেত্র

বীজগণিতের সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা

জ্যামিতিতে রেখার দৈর্ঘ্য এবং রেখাদ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল আলোচিত হইয়াছে। বীজগণিতের a, b, c প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে রেখার দৈর্ঘ্য ধরিয়া লইলে, $a \times a = a^2$, অর্থাৎ a এর পরিমাণ দীর্ঘ রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র। এইরূপ $b \times b = b^2$, bএর পরিমাণ দীর্ঘ রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র। এবং $a \times b$, $b \times c$, $c \times a$, যথাক্রমে a ও bএর পরিমাণ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট, b ও cএর পরিমাণ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট এবং c ও aএর পরিমাণ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র বুঝায়। সুতরাং যে সমস্ত বীজগণিতের সূত্র a, b, c ইত্যাদি সংখ্যার যে-কোনটির বর্গ বা যে-কোন দুইটির গুণফল এবং উহাদের সমষ্টি বা অন্তর দ্বারা প্রকাশিত হয়, তাহাদিগকে জ্যামিতিক চিত্র দ্বারাও প্রমাণ করা যাইতে পারে।

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হইলে উহাকে উহার সন্নিহিত বাহু AB এবং ADএর অন্তর্গত **আয়তক্ষেত্র** বলা হয়; এবং উহা সংক্ষেপে আয়তক্ষেত্র "AB, AD" কিংবা "AB.AD" লিখিত হয়। কখনও কখনও ইহাকে আয়তক্ষেত্র AC কিংবা BDও বলা হয়।

যদি AB এবং AD বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে a এবং b ইঞ্চ হয়, তবে উহার ক্ষেত্রফল $=$ AB $\times$ AD $= a \times b = ab$ বর্গ-ইঞ্চ।

এইরূপ ABCD বর্গক্ষেত্রটি সংক্ষেপে AB² কিংবা বর্গ AC বা বর্গ BD লিখিত হয়। এবং ABএর পরিমাণ a ইঞ্চ হইলে উহার ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ-ইঞ্চ।

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখা AB এর উপর কিংবা উহার বর্ধিত অংশের উপর কোন বিন্দু X লইলে, রেখাটি AX এবং BX দুইটি **অংশে** (Segments) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়। X বিন্দুটি AB রেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের অভ্যন্তরে থাকিলে উহা X বিন্দুতে **অন্তর্বিভক্ত** (Divided Internally) এবং বাহিরে থাকিলে উহা X বিন্দুতে **বহির্বিভক্ত** (Divided Externally) বলা হয়। উভয় চিত্রেই অংশ দুইটির পরিমাণ = X

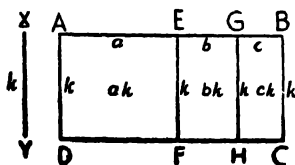
A——————X———B   A——————————B   X

বিন্দু হইতে প্রান্তবিন্দু A ও B এর দূরত্ব। এস্থলে AX = a এবং XB = b ধরিলে, ১ম চিত্রে, AB = AX + XB = a + b = অংশদ্বয়ের সমষ্টি। ২য় চিত্রে, AB = AX—XB = a—b = অংশদ্বয়ের অন্তর।

উপপাদ্য ৫০

[বীজগণিতের সূত্র $k(a+b+c+\cdots)=ka+kb+kc+\cdots$এর অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য।]

দুইটি সরল রেখার একটি, কতিপয় অংশে বিভক্ত হইলে, রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখার প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রগুলির সমষ্টির সমান হইবে।

[If of two straight lines one is divided into any number of parts, the rectangle contained by the two lines is equal to the sum of the rectangles contained by the undivided line and the several parts of the divided line.]

মনে কর, AB ও XY দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যে AB রেখাটি AE, EG, GB অংশে বিভক্ত হইল।

এবং ধরিয়া লও XY $= k$ একক, AE $= a$ একক, EG $= b$ একক এবং GB $= c$ একক (units)।

$\therefore$ AB = AE + EG + GB $= a + b + c$ একক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, XY.AB = XY.AE + XY.EG + XY.GB

অর্থাৎ $k(a+b+c) = ka + kb + kc.$

অঙ্কন। AB সরলরেখার A বিন্দু হইতে XYএর সমান করিয়া AD লম্ব টান; D বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল DC অঙ্কিত কর। E, G এবং B বিন্দু দিয়া AD এর সমান্তরাল করিয়া EF, GH এবং BC অঙ্কিত কর, উহারা যেন DC কে F, H এবং C বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ। ABCD, AEFD, EGHF এবং GBCH প্রত্যেকে এক-একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ AD = EF = GH = BC $= k.$

চিত্র হইতেই প্রতীয়মান হইবে যে,

আয়তক্ষেত্র ABCD = AEFD ক্ষেত্র + EGHF ক্ষেত্র + GBCH ক্ষেত্র।

কিন্তু অঙ্কনানুযায়ী ABCD = AD.AB = XY.AB $= k(a+b+c)$,

AEFD = AD.AE = XY.AE $= k.a$,

EGHF = EF.EG = XY.EG $= k.b$,

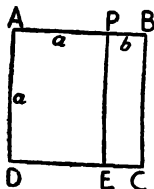
GBCH = GH.GB = XY. GB $= k.c$

$\therefore$ XY.AB = XY.AE + XY.EG + XY.GB

অর্থাৎ $k(a+b+c) = ka + kb + kc.$ ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন সরলরেখা দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইলে সমগ্র রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, সমগ্ররেখা এবং উহার প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

[If a straight line is divided internally into any two parts, then the square on the whole line is equal to the sum of the rectangles contained by the whole line and each of the segments.]

মনে কর, AB, P বিন্দুতে AP এবং PB এই দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে।

ধর, $AP = a$ একক, এবং $PB = b$ একক,

$\therefore AB = AP + PB = a + b$ একক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = AB.\ AP + AB.\ PB.$

অর্থাৎ $(a+b)^2 = (a+b)a + (a+b)b.$

ABএর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং P দিয়া ADএর সমান্তরাল করিয়া PE টান, উহা যেন CDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

$AB^2 =$ AC বর্গক্ষেত্র = আয়তক্ষেত্র AE + আয়তক্ষেত্র PC

$= AD.\ AP + BC.\ PB$

$= AB.\ AP + AB.\ PB.$

অর্থাৎ $(a+b)^2 = (a+b)a + (a+b)b.$

অথবা এইরূপ :— $AB^2 = AB.AB = AB\ (AP + PB)$

$= AB.AP + AB.\ PB.$ ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ২। কোন সরলরেখা দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইলে সমগ্র সরলরেখা ও উহার একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, উক্ত অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র এবং অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইবে।

[If a straight line is divided internally into any two segments, the rectangle contained by the whole line and one segment is equal to the square on that segment together with the rectangle contained by the two segments.]

মনে কর, AB সরলরেখাটি P বিন্দুতে AP এবং PB এই দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে (এখানে অবিভক্ত রেখাটি একটি অংশের সমান)।

ধর, $AP = a$, $PB = b$, $\therefore AB = a + b$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB. AP = AP^2 + AP. PB.$$

APএর উপর APED বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং B হইতে ADএর সমান্তরাল BC টান যেন উহা বর্ধিত DEকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

আয়তক্ষেত্র AC = বর্গক্ষেত্র AE + আয়তক্ষেত্র PC.

$\therefore AB. AP = AP^2 + AP. PB$

অর্থাৎ $(a + b)a = a^2 + ab$.

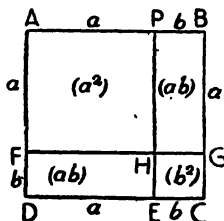
অথবা এইরূপ :— $AB. AP = (AP + PB)AP = AP^2 + AP. PB$.

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৫১

[বীজগণিতের $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ এই সূত্রটির অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য।]

কোন সরলরেখা কোন বিন্দুতে **অন্তর্বিভক্ত** হইলে, সমগ্র রেখাটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, উহার অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের **সমষ্টির** সমান হইবে।

[If a straight line is divided **internally** at any point, the square on the given line is equal to the sum of the squares on the two segments **together with** twice the rectangle contained by the segments.]

মনে কর, AB সরলরেখাটি P বিন্দুতে AP এবং PB এই দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে।

ধর, AP $= a$ একক, PB $= b$ একক,

$\therefore$ AB $=$ AP $+$ PB $= a + b$ একক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2AP.\ PB$,

অর্থাৎ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

অঙ্কন। ABএর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর ;

AD হইতে AP (অর্থাৎ a)এর সমান AF কাটিয়া লও, এবং P ও F বিন্দু দিয়া AD এবং ABএর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে PE এবং FG অঙ্কিত কর ; উহারা যেন পরস্পর H বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ। FD $=$ GC $=$ PB $= b$,

এবং AF $=$ AP $=$ BG $=$ FH $= a$,

বর্গক্ষেত্রAC $=$ ক্ষেত্র AH $+$ ক্ষেত্র HC $+$ ক্ষেত্র PG $+$ ক্ষেত্র FE.

এখন বর্গক্ষেত্র AC $=$ ABএর বর্গ, এবং উহার ক্ষেত্রফল $= (a+b)^2$ বর্গ একক।

ক্ষেত্র AH $=$ APএর বর্গ, এবং উহার ক্ষেত্রফল $= a^2$,, ,,

ক্ষেত্র HC $=$ HGএর বর্গ $=$ PBএর বর্গ, এবং উহার ক্ষেত্রফল $= b^2$,, ,,

ক্ষেত্র PG $=$ আয়ত BG, PB

$=$ আয়ত AP. PB, এবং উহার ক্ষেত্রফল $= ab$,, ,,

ক্ষেত্র FE $=$ আয়ত FH. FD

$=$ আয়ত AP. PB, এবং উহার ক্ষেত্রফল $= ab$,, ,,

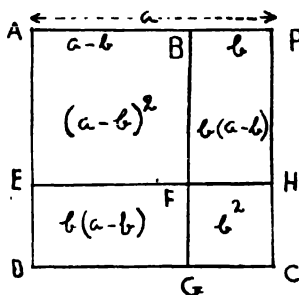
$\therefore AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2AP.\ PB$,

অর্থাৎ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৫২

[বীজগণিতের $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ এর অনুরূপ উপপাদ্য]

একটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে **বহির্বিভক্ত** হইলে, ঐ রেখাটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, উহার অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইতে অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের **অন্তরের** সমান হইবে।

[If a straight line is divided **externally** at any point, the square on the given line is equal to the sum of the squares on the two segments **diminished** twice the rectangle contained by the segments.]

মনে কর, AB সরলরেখা P বিন্দুতে AP এবং PB এই দুই অংশে বহির্বিভক্ত হইয়াছে। ধর, AP $= a$ একক, এবং PB $= b$ একক,

$\therefore$ AB = AP − PB $= a - b$ একক।

অঙ্কন। AP এর উপর APCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। AD হইতে AB $(a-b)$ এর সমান করিয়া AE কাটিয়া লও।

অতএব DE = PB $= b$। B এবং E দিয়া যথাক্রমে AD এবং AP এর সমান্তরাল করিয়া BG এবং EH টান, উহারা F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। ক্ষেত্র AF = ক্ষেত্রদ্বয় AE ও FC—ক্ষেত্রদ্বয় BC ও EC।

ইহাদের মধ্যে অঙ্কনানুযায়ী—

ক্ষেত্র AF = AB এর উপর বর্গ = AB², এবং উহার ক্ষেত্রফল $= (a-b)^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র AC = AP .... = AP², ... = a^2 ,,

ক্ষেত্র FC = FH অর্থাৎ BPএর উপর বর্গক্ষেত্র = BP^2 ... = b^2 বর্গ একক

ক্ষেত্র BC = আয়ত PC. BP = আয়ত AP. PB,$\cdots ab$ „

ক্ষেত্র EC = আয়ত EH. ED = আয়ত AP. PB,$\cdots ab$ „

$\therefore \quad AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2AP.PB$

অর্থাৎ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$ ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য ৫১ এবং ৫২ এর সাধারণ নির্বচনদ্বয় নিম্নলিখিত একই নির্বচনের অন্তর্গত করা যাইতে পারে।—

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা যে-কোন দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হইলে, রেখাটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা অংশদুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ বেশী বা ন্যূন হইবে।

উপপাদ্য ৫৩

[বীজগণিতের $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$ এর অনুরূপ উপপাদ্য]

দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর উহাদের সমষ্টি ও অন্তরের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

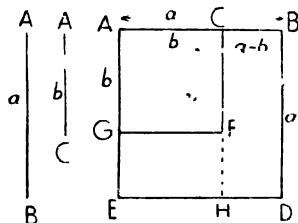
[The difference of the squares on two straight lines is equal to the rectangle contained by their sum and difference.]

মনে কর, AB, AC দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা একই সরল রেখাতে স্থাপিত হইল। ধর, AB = a, AC = b.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2 - AC^2 = (AB + AC)\ (AB - AC),$

অর্থাৎ $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$।

অঙ্কন। AB এবং ACএর উপর যথাক্রমে ABDE এবং ACFG বর্গক্ষেত্রদ্বয় অঙ্কিত কর। বর্ধিত CF যেন ED কে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। AB = AE = a একক, AC = AG = b একক,

∴ GE = CB = AB − AC = $a-b$ একক।

এখন $AB^2 - AC^2$ = ক্ষেত্র AD − ক্ষেত্র AF = আয়ত CD + আয়ত GH

= আয়ত BD. BC + আয়ত GF. GE

= আয়ত BD. BC + আয়ত AC. BC

= (BD + AC) BC

= (AB + AC) (AB − AC)

অর্থাৎ, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা একবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত এবং অপর এক বিন্দুতে অসমান দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত কিংবা বহির্বিভক্ত হইলে, অসমান অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র উক্ত রেখাটির অর্ধাংশের উপর এবং ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখার উপর অঙ্কিত বর্গ-ক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।

[If a straight line is bisected and also divided (internally or externally) into two unequal segments, the rectangle contained by the two unequal segments is equal to the difference of the squares on half the line and on the line between the points of section.]

মনে কর, AB সরল রেখাটি P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত এবং Q বিন্দুতে দুই অসমান অংশে অন্তর্বিভক্ত (১ম চিত্র) বা বহির্বিভক্ত (২য় চিত্র) হইয়াছে। তাহা হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

A P Q B

A P B Q

১ম চিত্রে, AQ. QB = $AP^2 - PQ^2$

২য় চিত্রে, AQ. QB = $PQ^2 - AP^2$

কারণ, ১ম চিত্রে AQ. QB = (AP + PQ) (PB − PQ)

= (AP + PQ) (AP − PQ) = $AP^2 - PQ^2$,

এবং ২য় চিত্রে AQ. QB = (PQ + AP) (PQ − PB)

= (PQ + AP) (PQ − AP) = $PQ^2 - AP^2$.

অনুশীলনী

১। বীজগণিতের নিম্নলিখিত সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্যের নির্বচন লিখ' এবং উহা প্রমাণ কর।—

(১) $(a-b)\,k=ak-bk$

(২) $(a+b)\,(c+d)=ac+ad+bc+bd$

(৩) $(a+b)\,(a+d)=a^2+ab+ad+bd$

(৪) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ [ক. প্র.

(৫) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(৬) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(৭) $(x+3)^2=x^2+6x+9.$

২। চিত্র অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে,

(১) কোন সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অর্ধাংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চতুর্গুণ। [ক. প্র.]

(২) কোন সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার তৃতীয়াংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের নবগুণ।

৩। উপপাদ্য ৫০ অনু (২) এর চিত্রে AB = 11·2 cm. এবং AEএর ক্ষেত্রফল 64 Sq. cm. হইলে PC এর ক্ষেত্রফল কত ?

৪। উপপাদ্য ৫১ এর চিত্রে AH ক্ষেত্রটি ·64 Sq. in. এবং আয়তক্ষেত্র PG = 2·56 Sq. in., AB এবং PBএর দৈর্ঘ্য নির্দেশ কর।

৪। একটি সরল রেখা কোন বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হইলে, যদি ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ, অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে সরল রেখাটি ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

৬। দুইটি সরল রেখার সমষ্টির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র এবং উহাদের অন্তরের সমান রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি, রেখাদুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ হইবে।

৭। একটী সরলরেখাকে এইরূপে অন্তর্বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বৃহত্তম হয়।

৮। যদি কোন সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত হয়, এবং পুনরায় দুই অসমান অংশে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হয়, তবে অসমান অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর-ফল, সমগ্র রেখা এবং উহার ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমান হইবে।

৯। যদি কোন সরলরেখা AB, P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং Q বিন্দুতে অসমান অংশে (ক) অন্তর্বিভক্ত বা (খ) বহির্বিভক্ত হয়, তবে উভয়ক্ষেত্রে $AQ^2+QB^2=2(AP^2+PQ^2)$

(ক) $AQ^2+QB^2=AB^2-2AQ.\ QB.$ [উপ ৫১

$=4AP^2-2\ (AP+PQ\ )\ (AP-PQ)$

$=4AP^2-2\ (\ AP^2=PQ^2)$ [উপ ৫২

$=2\ (AP^2,+PQ^2).$

(খ) $AQ^2+QB^2=AB^2+2AQ.\ QB.$ (উপ ৫২

$=4AP^2+2(PQ+AP)\ (\ PQ=AP\ )$

$=4AP^2+2(PQ^2-AP^2)$ [উপ ৫৩

$=4AP^2+2PQ^2-2AP^2$

$=2(AP^2+PQ^2).$

১০। AB, Q বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে, উপরের উপপাদ্যটি হইতে দেখাও যে Q, A হইতে চলিতে আরম্ভ করিয়া B পর্যন্ত পৌছিতে AQ^2+QB^2 এর মানের কিরূপ পরিবর্তন হইবে।

১১। দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

১২। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির উপর AD লম্ব টানা হইল, X যদি BCএর মধ্যবিন্দু হয়, প্রমাণ কর $AB^2 - AC^2=2BC.\times D.$ [ক. প্র.

১৩। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব

অঙ্কিত করিলে, লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অতিভুজের লম্বদ্বারা বিভক্ত অংশ দ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে। [ক. প্র.

ABC ত্রিভুজের AD সমকোণ A হইতে অতিভুজের উপর লম্ব।

$$2BD.\ CD = BC^2 - (BD^2 + CD^2)$$
$$= BC^2 - (AB^2 - AD^2 + AC^2 - AD^2)$$
$$= AB^2 + AC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AD^2$$
$$= 2AD^2.$$
$$\therefore \quad AD^2 = BD.\ CD.$$

১৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে অতিভুজের উপর AD লম্ব টানিলে প্রমাণ কর যে,

(ক) $AB^2 = BD.\ BC$

(খ) $AC^2 = CD.\ BC$

১৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের, BC ভূমি P এবং Q বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে,

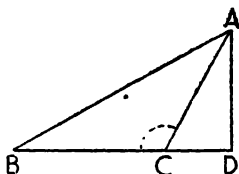
$$AP^2 = AC^2 - BP.\ PC$$
$$AQ^2 = AC^2 + BQ.QC$$

উপপাদ্য ৫৪

স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের, এবং উহাদের একবাহু ও ইহার উপর অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হইবে।

[In an obtuse-angled traingle, the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the squares on the sides containing the obtuse angle **together** with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ,

এবং AD বর্ধিত BCএর উপর লম্ব।

অতএব CD, BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.\ CD.$$

প্রমাণ। BD, C বিন্দুতে BC এবং CD এই দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে,

$\therefore \quad BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.\ CD,$ [উপ ৫...

$\therefore \quad BD^2 + DA^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2BC.\ CD$ ।

কিন্তু, ADB সমকোণ বলিয়া

$BD^2 + DA^2 = AB^2,$

এবং $CD^2 + DA^2 = CA^2;$ [উপ ২৮

$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.\ CD$ । ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই উপপাদ্যটি এইরূপভাবেও প্রকাশিত হইতে পারে—

$$AB^2 > (BC^2 + CA^2) \text{ by } 2BC.\ CD.$$

অর্থাৎ স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা, বৃহত্তর হইবে, এবং ইহাদের অন্তর, একটি বাহু ও উহার উপর অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ হইবে।

[In an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the sides containing that angle, by twice the rectangle contained by one of these sides and the projection of the other side upon it.]

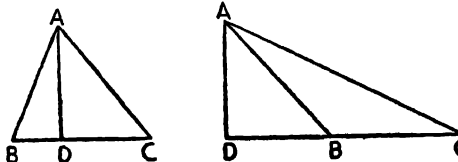
৫৪ উপপাদ্যের বিকল্প নির্বচন :—

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। উহাদের অন্তর শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের একটি বাহু, এবং বিপরীত শীর্ষ হইতে উহার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ ও স্থূলকোণের মধ্যবর্তী উহার অংশটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ হইবে।

[In an obtuse-angled triangle, the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the sum of the Squares on the sides containing that angle, by twice the rectangle contained by one of these sides and the intercept, between the foot of the perpendicular drawn on it from the opposite vertex, and the obtuse angle.]

উপপাদ্য ৫৫

যে কোন ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্ম কোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির, এবং ঐ দুই বাহুর যে কোন এক বাহু ও তাহার উপর অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের, **অন্তরের** সমান হইবে।

[In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle **diminished by** twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ∠C একটি সূক্ষ্মকোণ এবং AD, A হইতে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব। সুতরাং CD, BC বাহুর উপর CA বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\,BC\;CD$ ।

প্রমাণ। DB, C পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে,

$\therefore\; DB^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC.\,CD$, [উপ ৫২]

$\therefore\; DB^2 + DA^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2BC.\,CD$ ।

কিন্তু ADC, ADB সমকোণ বলিয়া,

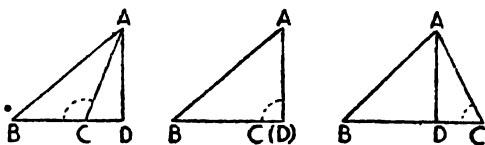
$DB^2 + DA^2 = AB^2$,

এবং $CD^2 + DA^2 = CA^2$,

$\therefore\; AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.\,CD$ । ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই উপপাদ্যটি এইরূপ ভাবেও প্রকাশিত হইতে পারে—

$AB^2 < (BC^2 + CA^2)$ by $2\,BC.CD$.

২৬, ৫০ এবং ৫১ উপপাদ্য সম্বন্ধে মন্তব্য—

(১) $\angle ACB$ **স্থূলকোণ** হইলে,

$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.\,CD$ (উপ ৫৪)

(২) $\angle ACB$ **সমকোণ** হইলে,

$AB^2 = BC^2 + CA^2$ (উপ ২৬)

(৩) $\angle ACB$ **সূক্ষ্মকোণ** হইলে,

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.\,CD$ (উপ ৫৫)

(২) ACB সমকোণ হইলে AD, ACএর সহিত মিলিয়া যায়,

সুতরাং $CD = 0$, অতএব $2BC.CD = 0$

এই তিনটি উপপাদ্য নিম্নলিখিত একই নির্বচনের অন্তর্ভুক্ত করা যাইতে পারে।—

ত্রিভুজের কোন কোণ স্থূলকোণ, সমকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হইলে, উহার বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, যথাক্রমে অন্য বাহু দুইটির উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর, সমষ্টির সমান অথবা ঐ সমষ্টি হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে; অসমান স্থলে অন্তর, শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের যে কোন একটি ও উহার উপর অপরটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমান হইবে।

[In any triangle the square on one side of a triangle is greater than, equal to, or less than the sum of the squares on the other two sides, according as the angle subtended by that side is an obtuse, right or acute angle; the difference in cases of inequality being twice the rectangle contained by one of the sides containing the angle and the projection on it of the other.]

দ্রষ্টব্য—কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় দেওয়া থাকিলে উহার কোণত্রয়ের কোনটি স্থূল, সূক্ষ্ম বা সমকোণ তাহা নির্ণয় করা যায়।

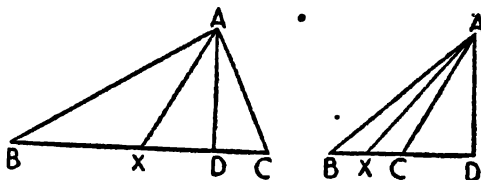
৫৫ উপপাদ্যের বিকল্প নির্বচন

কোন ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে; অন্তর, ঐ দুই বাহুর যে কোন বাহু, এবং বিপরীত শীর্ষ হইতে ইহার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ ও সূক্ষ্ম কোণটির মধ্যবর্তী উহার অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ হইবে।

[In any triangle the square on the side subtending an acute angle is less than the sum of the squares on the sides containing that angle by twice the rectangle contained by one of these sides and the intercept between the foot of the perpendicular, drawn on the side from the opposite vertex, and the acute angle.]

উপপাদ্য ৫৬

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি তৃতীয়বাহুর অর্ধাংশের উপর বর্গক্ষেত্র এবং তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর বর্গ-ক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ হইবে।

[The sum of the squares on any two sides of a triangle is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AX মধ্যমা BC বাহুকে X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2BX^2 + 2AX^2$।

অঙ্কন। A হইতে BCএর উপর AD লম্ব টান। ধর, AB ও AC অসমান। এবং $\angle AXB$ একটি স্থূল কোণ; অতএব $\angle AXC$ একটি সূক্ষ্ম কোণ।

প্রমাণ। AXB ত্রিভুজে, $AB^2 = BX^2 + AX^2 + 2BX.XD.$

[উপ ৫৪

আবার; AXC ত্রিভুজে, $AC^2 = CX^2 + AX^2 - 2CX.XD$ [উপ ৫৫

$= BX^2 + AX^2 - 2BX.XD,$ কারণ $BX = CX$,

$\therefore$ যোগ করিয়া $AB^2 + AC^2 = 2BX^2 + 2AX^2$. ই. উ. বি.

এই উপপাদ্যটিকে "এপোলোনিয়াসের উপপাদ্য" (Apollonius's Theorem) বলে। কারণ গ্রীক-পণ্ডিত Apollonius ইহা আবিষ্কার করিয়াছিলেন। বাস্তবিক পক্ষে Apollonius নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি আবিষ্কার করেন—ABC ত্রিভুজের ভূমি BCএর উপর যে কোন বিন্দু X লইলে যদি mBX =

nXC (m, n যে-কোন দুইটি সংখ্যা) হয়, তবে $m\text{AB}^2 + n\text{AC}^2 = (m+n)\text{AX}^2 + m\text{BX}^2 + n\text{XC}^2$.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের দুইবাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরফল, ভূমি, এবং উহার সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমান।

[The difference of the squares on the two sides of a triangle is equal to twice the rectangle contained by the base and the projection on it of the median bisecting the base.]

কারণ $\text{AB}^2 = \text{BX}^2 + \text{AX}^2 + 2\text{BX}.\text{XD}$

$\text{AC}^2 = \text{BX}^2 + \text{AX}^2 - 2\text{BX}.\text{XD}$

$\therefore \quad \text{AB}^2 - \text{AC}^2 = 4\text{BX}.\text{XD} = 2\text{BC}.\text{XD}.$

অনুশীলনী

১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC ; এবং BD, AC এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $\text{BC}^2\ 2 = \text{AC}.\text{CD}$.

২। ABC ত্রিভুজে, (১) $\angle \text{C} = 60°$, প্রমাণ কর যে, $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

(২) $\angle c = 120°$, প্রমাণ কর যে, $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের, ভূমি BC বা বর্ধিত BC এর উপর P যে-কোন বিন্দু লইলে, প্রমাণ কর যে

$\text{AB}^2 - \text{AP}^2 = \text{PB}.\text{PC}.$ [ক. প্র.

A হইতে BC এর উপর AD লম্ব টান।

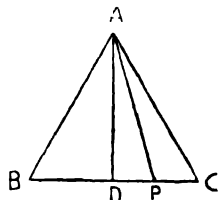
ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ,

$\therefore \quad \text{BD} = \text{CD}.$

$\text{AB}^2 = \text{BD}^2 + \text{AD}^2$

$\text{AP}^2 = \text{PD}^2 + \text{AD}^2$

$\therefore \text{AB}^2 - \text{AP}^2 = \text{BD}^2 - \text{PD}^2 = \text{BD} + \text{PD})(\text{BD} - \text{PD}) = \text{PB}.\text{PC}.$

ইহাকে Theorem of Pappus বলে।

৪। ত্রিভুজের বাহু তিনটি যথাক্রমে 10″ ; 5″ এবং 6″ হইলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

৫। ত্রিভুজের বাহু তিনটি যথাক্রমে 5″, 6″ এবং 7″ হইলে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী।

৬। প্রমাণ কর যে কোন সামান্তরিকের বাহু-চতুষ্টয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান। [ক. প্র.

৭। ABCD চতুর্ভুজের, P, Q, R এবং S যথাক্রমে, AB, BC, CD এবং DA এর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে AC এবং BD কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, PR এবং QS এর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ।

৮। ABCD চতুর্ভুজের $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$, প্রমাণ কর যে উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে।

৯। ABCD আয়ত ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে যে কোন বিন্দু P লইলে, প্রমাণ কর যে $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$ [ক. প্র.

১০। কোন চতুর্ভুজের বাহু-চতুষ্টয়ের উপর বর্গের সমষ্টি, উহার কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গ, এবং কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুসংযোজক সরলরেখার উপর বর্গের চতুর্গুণের, সমষ্টির সমান হইবে। [ক. প্র.

১১। ABC একটি ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ, যদি BE এবং CF যথাক্রমে AC এবং AB এর লম্ব টানা হয়, প্রমাণ কর যে, $BC^2=AB.\ BF+AC.\ CE$.

১২। ABC ত্রিভুজের AX, BY এবং CZ মধ্যমাত্রয় হইলে, প্রমাণ কর যে, $3\ (AB^2+BC^2+CA^2)=4\ (AX^2+BY^2+CZ^2)$ [ক. প্র.

১৩। G, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সম্পাতবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$$

১৪। ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AB^2+AC^2=GB^2+GC^2+4GA^2$$

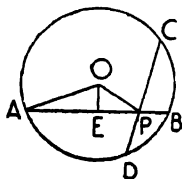
১৫। একটি গতিশীলবিন্দু এইরূপভাবে ভ্রমণ করে যে, অন্য দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের উপর বর্গের সমষ্টি ধ্রুবক (সর্বাবস্থায় সমান) ; বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৬। ABC ত্রিভুজের BC ভূমি D এবং E বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইলে প্রমাণ কর যে, $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+4DE^2$

বৃত্ত-সম্বন্ধীয় আয়তক্ষেত্র

উপপাদ্য ৫৭

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা উহার অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect within it, the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.]

মনে কর, ABC বৃত্তের AB এবং CD জ্যা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AP.PB = CP. PD.

অঙ্কন। বৃত্তটির কেন্দ্র O হইতে ABএর উপর OE লম্ব টান। অতএব AB, E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল, অর্থাৎ AE = EB।

OA, OP সংযুক্ত কর।

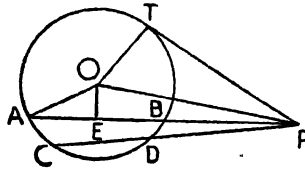
প্রমাণ। $AP.PB = (AE + EP)(EB - EP)$
$= (AE + EP)(AE - EP)$
$= AE^2 - EP^2$
$= (OA^2 - OE^2) - (OP^2 = OE^2)$
$= OA^2 - OP^2 = r^2 - OP^2$ (r = বৃত্তটির ব্যাসার্ধ)

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $CP.PD = r^2 - OP^2$,

$\therefore$ $AP.PB = CP.PD.$ ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৫৮

বৃত্তের দুইটি জ্যা উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে, একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে। এবং প্রত্যেক আয়তক্ষেত্র ছেদবিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect at a point outside it, the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other. And each rectangle is equal to the square on the tangent drawn from the point of intersection.]

মনে কর, ABC বৃত্তের AB এবং CD জ্যা দুইটি উহার বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করিল। এবং ছেদবিন্দু P হইতে PT একটি স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AP.PB = CP.PD = PT^2$.

অঙ্কন। বৃত্তের কেন্দ্র O হইতে ABএর উপর OE লম্ব টান।

অতএব AB, E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল, অর্থাৎ $AE = EB$.

OA, OP, OT সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $AP.PB = (PE + AE)(PE - BE)$

$= (PE + AE)(PE - AE)$

$= PE^2 - AE^2 = (OP^2 - OE^2)(OA^2 - OE^2)$

$= OP^2 - OA^2 = OP^2 - r^2$, (r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ)।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $CP.PD = OP^2 - r^2$.

$\therefore$ $AP.PB = CP.PD$.

আবার OT ব্যাসার্ধ, PT স্পর্শকের উপর লম্ব।

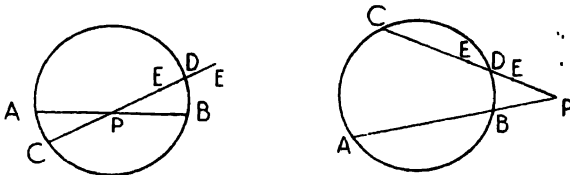
$\therefore$ $PT^2 = OP^2 - OT^2 = OP^2 - r^2$

$\therefore$ $AP.PB = CP.PD = OP^2 - r^2 = PT^2$ ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য—এই স্থলে PBA এবং PDC দুইটি ছেদক। সুতরাং কোন ছেদকের সমগ্র ছেদক এবং বৃত্তের বহিঃস্থ উহার অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বহিঃস্থ বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর বর্গের সমান।

উপপাদ্য ৫৭ এবং ৫৮-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা

দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা পরস্পর অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থভাবে ছেদ করিলে যদি একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে সরলরেখাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দু-চতুষ্টয় এক-বৃত্তস্থ হইবে।

[If two finite straight lines intersect either internally or externally so that the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other, then the extremities of these two straight lines are concyclic.]

মনে কর, AB, CD দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা অন্তঃস্থভাবে (১ম চিত্র) অথবা বহিঃস্থভাবে (২য় চিত্র) পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল, যেন $AP.\ PB = CP.\ PD$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, C, B, D প্রান্তবিন্দু-চতুষ্টয় একবৃত্তস্থ।

প্রমাণ। যদি A, B, C, D একবৃত্তস্থ না হয়, তবে মনে কর, A, B, C, দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি CD কিংবা বর্ধিত CDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AP. PB = CP. PE ;

কিন্তু কল্পনানুযায়ী, AP. PB = CP. PD,

∴ CP. PD = CP. PE।

∴ PD = PE,

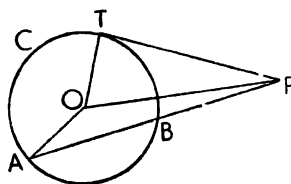
সমগ্ররেখা ইহার অংশের সমান, ইহা অসম্ভব।

সুতরাং A, B, C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়া না যাইয়া পারে না।

অর্থাৎ A, B, C এবং D একই বৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৫৯

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা টানিলে, যদি উহাদের একটি, বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে এবং অপরটি বৃত্তের সহিত মিলিত হয়, এবং যদি সমগ্র ছেদকের এবং বৃত্তের বহিঃস্থ উহার অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর রেখাটির উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে শেষোক্ত রেখাটি বৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে।

[If from a point outside a circle two straight lines are drawn one of which cuts the cirlce in two points and the other meets it, and if the rectangle contained by the whole secant and the part of it without the circle is equal to the square on the other line, then the latter is a tangent to the circle.]

মনে কর, ABC একটি বৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র। বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু

হইতে একটি ছেদক বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। এবং অন্য একটি সরলরেখা PT, বৃত্তের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে যেন $PA \cdot PB = TP^2$

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

PT, বৃত্তের T বিন্দুতে স্পর্শক।

OA, OP, OT সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $PA. PB = OP^2 - r^2 = OP^2 - OT^2$ [উপ ৫৮

কিন্তু $PA. PB = PT^2$, (কল্পনা)

$\therefore \quad OP^2 - OT^2 = PT^2$,

$\therefore \quad OP^2 = PT^2 + OT^2$,

$\therefore \quad \angle OTP =$ এক সমকোণ, [উপ ২৭

সুতরাং PT রেখা, T বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক। ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

যদি PT স্পর্শক না হয়, তবে ইহা T ভিন্ন আরও একবিন্দুতে বৃত্তটিকে ছেদ করিবে; মনে কর ইহা আবার T′ বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করিল।

এখন $PA. PB = PT. PT'$, [উপ ৫৮

কিন্তু $PA. PB = PT^2$,

$\therefore \quad PT. PT' = PT^2$,

$PT' = PT$.

কিন্তু সমগ্র রেখা উহার এক অংশের সমান, ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ PT বৃত্তটিকে T ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। অতএব PT বৃত্তের একটি স্পর্শক।

দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য ৫৯ উপপাদ্য ৫৮এর বিপরীত। ই. উ. বি.

অনুশীলনী

১। বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে কোন বৃত্তে একটি ছেদক PAB এবং একটি স্পর্শক PT অঙ্কিত হইল;

(১) যদি $PA = \cdot 8''$ এবং $PB = 1\cdot 8''$, PTএর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(২) যদি $PT = 1\cdot 4''$ এবং $PB = 2''$, PAএর দৈর্ঘ্য কত ?

২। AB সরলরেখা ব্যাস লইয়া একটি বৃত্তার্ধ অঙ্কিত হইল, এবং ABএর যে কোন বিন্দু P হইতে অঙ্কিত উহার লম্ব, পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $AP. PB = PQ^2$.

৩। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, উহাদের সাধারণ জ্যা-এর যে কোন বিন্দু P দিয়া প্রত্যেক বৃত্তে এক একটি করিয়া দুইটি জ্যা AB এবং CD অঙ্কিত করিলে, প্রমাণ কর যে $PA. PB = CP. PD$.

৪। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে এবং উহার সাধারণ জ্যাটি বর্ধিত করিলে, উহা বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শককে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [ক. প্র.

৫। ৫৮ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান। [ক. প্র.

৬। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, বর্ধিত সাধারণ জ্যা-এর উপর যে কোন বিন্দু হইতে দুই বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানিলে উহারা পরস্পর সমান হইবে।

৭। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে সাধারণ জ্যার যে কোন বিন্দু P হইতে বৃত্তদ্বয়ে যথাক্রমে AB এবং CD দুইটি জ্যা টানিলে, উহাদের প্রান্তবিন্দু-চতুষ্টয় একই বৃত্তস্থ হইবে।

৮। ABC ত্রিভুজে শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর AD, BE, CF লম্ব টানিলে এবং O লম্ববিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

$AO. OD = BO. OE = CO. OF$।

৯। ABC সমকোণী ত্রিভুজের C সমকোণ, C হইতে অতিভুজের উপর CD লম্ব টানিলে, প্রমাণ কর $AC^2 = AB. AD$.

১০। বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে একটি বৃত্তে PA, PB দুইটি স্পর্শক টানা হইল ; বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ r হইলে এবং OP, AB জ্যাকে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে $OP. OQ = r^2$.

১১। PQ একটি বৃত্তের নির্দিষ্ট ব্যাস এবং MN, PQ অথবা বর্ধিত PQএর উপর লম্ব ; যদি P হইতে অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা MNকে R এবং বৃত্তটিকে S বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, PR. PS = ধ্রুবক।

১২। P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও MN একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ; P হইতে অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা MNকে R বিন্দুতে ছেদ করিল ; PRএর উপর যদি এইরূপ একটি বিন্দু S লওয়া যায় যেন PR. PS = ধ্রুবক, S বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৩। কোন চাপের জ্যার দৈর্ঘ্য $2a$, উচ্চতা h এবং ব্যাসার্ধ r হইলে, প্রমাণ কর যে, $h(2r-h)=a^2$, এবং $r=\frac{a^2+h^2}{2h}$.

কোন বৃত্তের একটি চাপের জ্যার দৈর্ঘ্য 12″ এবং উচ্চতা 5″ হইলে, উহার ব্যাস কত ?

১৪। একটি বৃত্তাকার খিলানের ব্যাসার্ধ 16′ এবং উহার উচ্চতা 8′ হইলে উহার জ্যার পরিমাণ কত ?

১৫। বৃত্ত হইতে কোন বহির্বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব a, ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য b এবং ব্যাসার্ধ r হইলে, প্রমাণ কর যে, $a(a+2r)=b^2$.

১৬। AB ব্যাসের উপর একটি বৃত্তার্ধ অঙ্কিত করিয়া AC ও BD যে-কোন দুইটি জ্যা টানা হইল ; উহারা যদি E বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AE + BD.BE$. [ক. প্র.

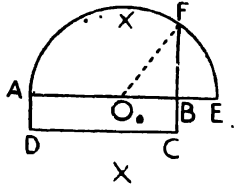
১৭। কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিলে এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4r^2.$$

১৮। দুইটি বৃত্ত পরস্পর A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল, এবং দুইটি সরল সাধারণ স্পর্শক PQ এবং RS অঙ্কিত হইল ; যদি সাধারণ জ্যা RS বর্ধিত হইয়া স্পর্শকদ্বয়কে যথাক্রমে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $CD^2=PQ^2+AB^2$.

সম্পাদ্য ৩২

একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a square equal in area to a given rectangle.]

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

ইহার ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BE =BC হয়।

AEকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং O কেন্দ্র করিয়া OE ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। বর্ধিত CB বাহু পরিধিকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে BF এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রই নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র হইবে।

OF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\angle OBF =$ সমকোণ,

$\therefore \quad BF^2 = OF^2 - OB^2$

$= OE^2 - OB^2$, (কারণ, ব্যাসার্ধ OF = ব্যাসার্ধ OE)

$= (OE + OB)(OE - OB)$,

$= (OA + OB).BE$, কারণ $OA = OE$

$= AB.\ BE$

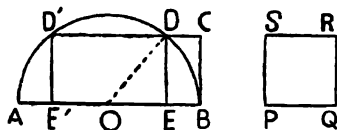
$= AB.\ BC$ ই. স. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। যে কোন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

প্রথমে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। ইহার পর ত্রিভুজটির সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। অবশেষে উপরি-উক্ত সম্পাদ্য অনুসারে, আয়তক্ষেত্রটির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

সম্পাদ্য ৩৩

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপভাবে (১) অন্তর্বিভক্ত বা (২) বহির্বিভক্ত করিতে হইবে, যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[Divide a straight line, (1) internally or (2) externally into two segments so that the rectangle contained by those two segments may be equal to a given square.]

(১) মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং PQRS একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

AB সরল রেখাকে এমন দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র PQRS বর্গক্ষেত্রটির সমান হয়।

অঙ্কন। ABকে ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। B বিন্দুতে PQএর সমান করিয়া BC, ABএর লম্ব টান। C বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল করিয়া CDD′ অঙ্কিত কর, উহা যেন পরিধিকে D ও D′ বিন্দুতে ছেদ করিল। D হইতে ABএর লম্ব DE টান। তাহা হইলে AB রেখাটি E বিন্দুতে এইরূপ বিভক্ত হইয়াছে যেন AE. EB $= PQ^2$

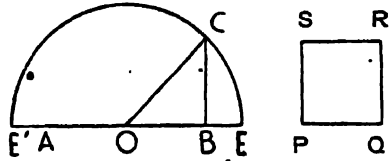
প্রমাণ। O, ABএর মধ্যবিন্দু লইলে, O বৃত্তটির কেন্দ্র। OD সংযুক্ত কর।

$$AE.\ EB=(AO+OE)(OB-OE)=(OB+OE)(OB-OE)$$

$$=OB^2-OE^2=OD^2-OE^2=DE^2=BC^2=PQ^2$$

ই. স. বি.

(২) মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং PQRS একটি নির্দিষ্ট বর্গ।

ABকে এমন দুই অংশে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র PQRSএর সমান হয়।

অঙ্কন। ABকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ABএর B বিন্দুতে PQএর সমান BC লম্ব টান। OC সংযুক্ত কর। O কেন্দ্র করিয়া, OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। এই অর্ধবৃত্তের পরিধি বর্ধিত ABকে E ও E′ বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AE.EB অথবা AE′ E′B, PQRS এর সমান হইবে।

প্রমাণ। $AE.EB=(OE+OA)(OE-OB)$

$$=(OE+OB)(OE-OB)$$

$$=OE^2-OB^2$$

$$=OC^2-OB^2$$

$$=BC^2=PQ^2$$ ই. স. বি.

এইরূপ $AE'.E'B=PQ^2$

দ্রষ্টব্য—PQ, ABএর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অন্তর্বিভাগ সম্ভব নয়।

জ্যামিতিক উপায়ে বর্গমূল নির্ণয়

দ্বিতীয় খণ্ডে উপপাদ্য ২৮এর সাহায্যে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ইত্যাদির মান নির্ণয় করার একটি জ্যামিতিক প্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে। এই স্থলে আরও একটি প্রণালী প্রদর্শিত হইল।

মনে কর, aএর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। $a=a\times1$,

সুতরাং a একক এবং 1 একক বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। এবং সম্পাদ্যের অঙ্কন দ্বারা উহার সমান একটি বর্গ অঙ্কিত কর। এই বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a}$

আবার মনে কর, 12 এর বর্গমূল বাহির করিতে হইবে।

$6\times2=12$, সুতরাং 6 একক দীর্ঘ এবং 2 একক প্রশস্ত একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। উহার সমান করিয়া অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর পরিমাণই $\sqrt{12}$.

জ্যামিতিক প্রণালীতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

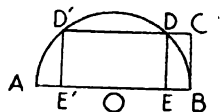
(Solution of Quadratic Equations)

মনে কর, $\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ xy=b^2 \end{array}\right\}$ এই সমীকরণটির সমাধান করিতে হইবে।

অর্থাৎ x এবং y এর যোগফল $=a$, এবং উহাদের গুণফল $=b^2$; উহাদের প্রত্যেকের মান কত, নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। a এর সমান AB সরলরেখা অঙ্কিত কর।

AB ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং B হইতে ABএর লম্ব BC টান যেন $BC=\sqrt{b^2}=b$. C বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল CDD′ রেখা টান, উহা পরিধিকে D এবং D′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

D′ D C
A E′ O E B

DE, ABএর উপর লম্ব টান। এখন AE এবং EB এর দৈর্ঘ্যই x এবং yএর মান।

প্রমাণ। $AE + EB = AB = a$ একক $= x + y$

$AE.\ EB = DE^2 = BC^2 = b^2 = xy$

$\therefore \left.\begin{array}{l} AE = x. \\ BE = y. \end{array}\right\}$

সুতরাং AE এবং BE এর দৈর্ঘ্যই সমীকরণটির সমাধান।

দ্রষ্টব্য—D′ হইতে D′E′ লম্ব AB এর উপর টানিলে প্রমাণ করা যায়

$AE'.\ E'B = D'E'^2 = b^2 = xy.$

$A'E + E'B = AB = x + y.$

সুতরাং এস্থলে $x = AE'$, $y = BE'$

কিন্তু $AE' = BE$ এবং $BE' = AE$.

$\therefore \quad x = BE,\ y = AE.$

অতএব xএর দুইটি এবং y এর দুইটি করিয়া মান পাওয়া গেল।

(২) $x^2 + 20x + 64 = 0$ সমীকরণটির সমাধান কর।

এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের গুণফল $= 64$ এবং যোগফল $= 20$।

উপরের চিত্রে $AB = 20$ একক এবং $BC = \sqrt{64} = 8$ একক লইতে হইবে।

সুতরাং $DE = 8$ একক।

$\therefore \quad AE.\ EB = DE^2 = 64$

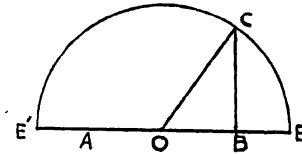
এবং $\quad AE + EB = 20,$

AE এবং EB এর দৈর্ঘ্য মাপিলে দেখা যাইবে, $AE = 16$ একক, $BE = 4$ একক; আবার $AE' = 4$ একক, $BE' = 16$ একক।

সুতরাং সমাধান— $\left.\begin{array}{l} x = 16 \text{ or } = 4 \\ y = 4 \text{ or } = 16 \end{array}\right\}$

(৩) মনে কর, $\left.\begin{array}{l} x - y = 5 \\ xy = 36 \end{array}\right\}$ এই সমীকরণের সমাধান করিতে হইবে।

এখানে x এবং y এর অন্তর ও গুণফল দেওয়া আছে।

অঙ্কন। $\sqrt{36}=6$. 5 একক দীর্ঘ AB সরল রেখাটি টান। AB, O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং B হইতে ABএর লম্ব BC টান যেন

BC = 6 একক। OC সংযুক্ত কর। O কেন্দ্র করিয়া OC ব্যাসার্ধ লইয়া অর্ধবৃত্ত ECE′ অঙ্কিত কর যেন উহা বর্ধিত AB কে E ও E′ এ ছেদ করিল।

এখন AE, EB অথবা AE′ এবং E′B x এবং y এর সমান হইবে।

প্রমাণ। AE − EB = AB = 5 একক ; OE = OE′ এবং OA = OB,

∴ BE = AE′, এবং AE = BE′.

AE. EB = BE′. BE = $BC^2 = 6^2 = 36$।

এবং AE′. E′B = AE′. AE = $BC^2 = 36$

BE′ − E′A = AB = 5

$$\left.\begin{array}{l} x = AE \text{ or } AE' = 9 \text{ or } 4 \\ y = BE \text{ or } BE' = 4 \text{ or } 9 \end{array}\right\} \quad \text{(মাপিয়া)}$$

(৪) $x^2 - 5x - 36 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করিতে হইলে, এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের অন্তর = −5 এবং যাহাদের গুণফল = −36

AB সরল রেখা 5 এককের সমান লও এবং ইহাকে E ও E′ বিন্দুতে এইরূপভাবে বহির্বিভক্ত কর যেন AE. EB অথবা AE′. E′B = $BC^2 = 6^2$ হয়। AE এবং EB অথবা AE′ এবং E′Bএর দৈর্ঘ্যই সমীকরণের সমাধান।

দ্রষ্টব্য। এখানে পরম রাশিটি (—36) ঋণরাশি (Negative Quantity) বলিয়া AB কে বহির্বিভক্ত করা হইল। কিন্তু (২) দৃষ্টান্তে পরম রাশিটি (+64) ধনরাশি (Positive Quantity) বলিয়া AB কে অন্তর্বিভক্ত করা হইয়াছে।

অনুশীলনী

১। একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুদ্বয় যথাক্রমে 6″ এবং 4″, ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

২। নির্দিষ্ট পরিসীমায় একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

৩। আয়তক্ষেত্রের দুই বাহুর অন্তর নির্দিষ্ট আছে, একটি নির্দিষ্ট বর্গ ক্ষেত্রের সমান করিয়া আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

৪। একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি বর্গক্ষেত্র সমান হইলে বর্গ-ক্ষেত্রের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা হইতে ক্ষুদ্রতর।

৫। একটী নির্দিষ্ট সামন্তরিকের সমান একটি বর্গ অঙ্কিত কর।

৬। 4″, 5″ এবং 6″ বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং উহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। বর্গের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

৭। একটি পঞ্চভুজ এবং একটি ষড়্‌ভুজের সমান করিয়া দুইটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৮। জ্যামিতিক অঙ্কনদ্বারা নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর।— 16, 24, 36, 45 এবং 48।

৯। জ্যামিতিক অঙ্কনদ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :

(1) $x+y=7, xy=10$; (2) $x-y=3, x=40$;

(3) $x+y=10, xy=16$; (4) $x^2+8x+12=0$;

(5) $x^2-9x+14=0$; (b) $x^2-8x-9=0$.

১০। জ্যামিতিক অঙ্কনদ্বারা $ax^2+2bx+c=0$ এই সমীকরণের সমাধান কর।

[সঙ্কেত :—অথবা $x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{c}{a}=0$;

মনে কর AB = 1, ABএর লম্ব BC $= -\frac{2b}{a}$ এবং BCএর লম্ব CD $= \frac{c}{a}$;

DA সংযুক্ত কর। CBএর সমান্তরাল DE, ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AE = AB − BE = AB − CD $= 1-\frac{c}{a}$; ADএর উপর অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা BCকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিল। DP, PA সংযুক্ত কর। BP এবং BQএর দৈর্ঘ্যই xএর মান।

মনে কর, BP $=x$. $DA^2 = DP^2 + PA^2 = DC^2 + CP^2 + AB^2 + BP^2$

$$= \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(-\frac{2b}{a}-x\right)^2 + \left(1+x^2\right).$$

আবার $DA^2 = DE^2 + EA^2 = BC^2 + EA^2$

$$= \left(-\frac{2b}{a}\right)^2 + \left(1-\frac{c}{a}\right)^2.$$

$$\therefore \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{2b}{a}+x\right)^2 + \left(1+x^2\right) = \left(-\frac{2b}{a}\right)^2 + \left(1-\frac{c}{a}\right)^2$$

সরল করিলে $ax^2+2bx+c=0$.

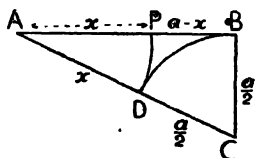
১১। একটি সরলরেখাকে এইরূপ দুইটি অংশে অন্তর্বিভক্ত কর যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হয়।

১১। একটি সরলরেখাকে এইরূপ দুইটি অংশে বহির্বিভক্ত কর যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান হয়।

সম্পাদ্য ৩৪

একটী নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এইরূপ দুই অংশে (১) **অন্তর্বিভক্ত** বা (২) **বহির্বিভক্ত** করিতে হইবে যেন সমগ্র রেখা ও একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[To divide a given straight line (1) **internally** or (2) **externally** into two segments such that the rectangle contained by the whole line and one of the segments is equal to the square on the other.]

(১) মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, ইহাকে P বিন্দুতে এরূপে অন্তবিভক্ত করিতে হইবে যেন AB. BP = AP² হয়।

অঙ্কন। B বিন্দু হইতে ABএর লম্ব BC টান, BC যেন ABএর অর্ধ হয়। AC সংযুক্ত কর। C কেন্দ্র করিয়া CB ব্যাসার্ধ লইয়া একটী চাপ অঙ্কিত কর, উহা CAকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। A কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটী চাপ অঙ্কিত কর ; উহা ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

P, AB রেখার উপর নির্ণেয় বিন্দু।

প্রমাণ। ধর, $AB = a$ এবং $AP = x$

$$\therefore \quad BC = CD = \frac{a}{2}, \quad PB = a - x.$$

এবং $AD = AP = x$.

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $AB^2 + BC^2 = AC^2$

অথবা, $$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$\therefore \quad a^2 = x^2 + ax.$

$\therefore \quad a^2 - ax = x^2.$

$\therefore \quad a\,(a - x) = x^2$

অর্থাৎ AB. BP = AP² ই. স. বি.

(২) মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ইহাকে P′ বিন্দুতে এরূপভাবে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন AB. BP′ = AP′² হয়।

অঙ্কন। B বিন্দু হইতে AB এর অর্ধ BC লম্ব টান। CA সংযুক্ত কর এবং বর্ধিত AC হইতে AB এর অর্ধ CD কাটিয়া লও। এখন A কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, ইহা যেন বর্ধিত BA কে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল। P′ ই নির্ণেয় বিন্দু হইবে।

প্রমাণ। ধর, AB = a এবং AP′ = x.

$\therefore$ AC = AD—CD = AP′—BC = $x - \frac{a}{2}$

এখন ABC সমকোণী ত্রিভুজে, AB² + BC² = AC²,

অতএব $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\therefore \quad a^2 = x^2 - ax,$

$\therefore \quad a^2 + ax = x^2,$

অর্থাৎ $a(a + x = x^2,$

অথবা AB. BP′ = AP′² ই. স. বি.

মাধ্যানুপাতিক ছেদ (Medial Section)। যদি কোন সরল রেখা এইরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে সমগ্র রেখা এবং উহার এক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে রেখাটি ছেদ বিন্দুতে **মাধ্যানুপাতিক অংশে** বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়।

এবং ছেদবিন্দুটিকে **মাধ্যানুপাতিক ছেদবিন্দু** (Point of Medial Section) বলে।

$$AB.PB = AP^2$$

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB},$$

সুতরাং AP, AB এবং PBএর মাধ্যানুপাতিক (Mean proportional)।

বৈজিক ব্যাখ্যা

যদি একটি সরল রেখা P বিন্দুতে এরূপ অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হয় যে $AB.\ BP = AP^2$

এবং যদি $AB = a$, $AP = x$,

সুতরাং $BP = a - x$,

তবে, $a(a - x) = x^2$,

$\therefore\ x^2 + ax - a^2 = 0$,

$$\therefore\ x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a \text{ or } -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)a.$$

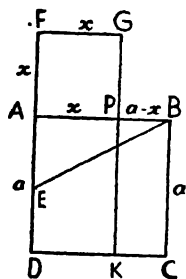
অতএব, $AP = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a$

এবং AP' (বহির্বিভাগ) $= -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)a.$

বিকল্প অঙ্কন। মনে কর, AB সরল রেখাটিকে মাধ্যানুপাতিক অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

ABএর উপর বর্গ ABCD অঙ্কিত কর।

ADকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর, EB সংযুক্ত কর এবং EA, F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন EF = EB. AFএর উপর বর্গ AFGP অঙ্কিত কর।

AB, P বিন্দুতে মাধ্যানুপাতিক অংশে অন্তর্বিভক্ত হইবে।

বহির্বিভাগের জন্য ED বর্ধিত কর যেন EF′ = EB. AF′এর উপর বর্গক্ষেত্র AF′G′P′ অঙ্কিত করিলে AB, P′ বিন্দুতে—মাধ্যানুপাতিক অংশে বহির্বিভক্ত হইবে।

F x G
x
A x P a-x B
a E a
D K C

অনুশীলনী

১। 3″ লম্বা একটি সরলরেখাকে মাধ্যানুপাতিক ছেদবিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত কর।

২। AB সরল রেখার P মাধ্যানুপাতিক অন্তঃছেদ বিন্দু, AB যদি a এককের সমান হয়, প্রমাণ কর, $AP = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a.$

[সঙ্কেত : উপরি-উক্ত অন্তর্বিভাগের চিত্রে $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$]

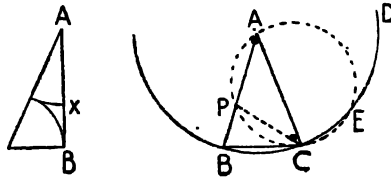
৩। AB সরল রেখার P মাধ্যানুপাতিক বহিঃছেদ-বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর, $AP = -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)a.$

৪। যদি কোন সরল রেখা মাধ্যানুপাতিক অংশে অন্তর্বিভক্ত হয় এবং বৃহত্তর অংশ হইতে ক্ষুদ্রতরের সমান অংশ ছেদ করা হয়, তবে বৃহত্তর অংশটিও মাধ্যানুপাতিক অংশে বিভক্ত হইবে।

৫। AB সরলরেখা P বিন্দুতে মাধ্যানুপাতিক অংশে বিভক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BP^2 = 3AP^2$.

সম্পাদ্য ৩৫

একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমি-সংলগ্ন প্রত্যেকটি কোণ শীর্ষ-কোণের দ্বিগুণ হইবে।

[To construct an isosceles triangle. having each of the angles at the base double of the vertical angle.]

অঙ্কন। যে-কোন একটি সরলরেখা AB লও এবং উহাকে P বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ কর যেন $AB.\ BP = AP^2$ হয়।

Aকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া BCD বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং এই বৃত্তে APএর সমান BC জ্যা স্থাপন কর।

AC সংযুক্ত কর। ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

BC সংযুক্ত কর, এবং A, P, C বিন্দুত্রয় দিয়া APC বৃত্ত অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। $BA.\ BP = AP^2 = BC^2$,

$\therefore$ BC, APC বৃত্তের স্পর্শক এবং C স্পর্শবিন্দু। [উপ ৫৯

$\therefore$ $\angle BCP =$ একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ PAC। [উপ ৪৯

উভয়ের সহিত $\angle PCA$ যোগ কর,

$\therefore$ $\angle BCA = \angle PAC + \angle PCA =$ বহিঃস্থ $\angle CPB$;

কিন্তু $\angle BCA = \angle ABC$, যেহেতু $AB = AC$;

$\therefore$ $\angle CBP = \angle CPB$,

$\therefore$ $CP = CB = AP$,

$\therefore \quad \angle PAC = \angle PCA,$

$\therefore \quad \angle BCA = \angle PAC + \angle PCA = 2\angle PAC = 2\angle A.$

সুতরাং $\angle ABC = \angle BCA = 2\angle A.$

দ্রষ্টব্য। এই স্থলে $\angle B = \angle C = \angle 2A,$

কিন্তু $A + B + C = 180°,$

$\therefore \quad A + 2A + 2A = 180°,$

$\therefore \quad 5A = 180°,$

$\therefore \quad A = 36°.$

$\therefore \quad \angle B = \angle C = 2\angle A = 72°.$

সুতরাং এই অঙ্কনদ্বারা $9°, 18°, 27°, 54°, 63°, 81°$ এর কোণ অঙ্কিত করা যায়।

অতএব এই সম্পাদ্যে অঙ্কিত ত্রিভুজের শীর্ষকোণ $36°$ এবং ভূমিসংলগ্ন প্রত্যেক কোণ $72°$। শীর্ষকোণ দুই সমকোণের $\frac{36}{180} = \frac{1}{5}$; এবং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ দুই সমকোণের $\frac{72}{180} = \frac{2}{5}$ অথবা যথাক্রমে সমকোণের $\frac{2}{5}$ এবং $\frac{4}{5}$.

অনুশীলনী

১। একটি সমকোণকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত কর।

২। উপরি-উক্ত সম্পাদ্যের চিত্রে এমন একটি ত্রিভুজ নির্দেশ কর যাহার শীর্ষকোণ প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণের এক-তৃতীয়াংশ।

৩। ABC ত্রিভুজের $\angle B = \angle C = 2\angle A$; প্রমাণ কর যে,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

৪। উপরি-উক্ত সম্পাদ্যের চিত্রে বৃত্তদ্বয় F বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে,

(1) $BC = CF.$

(2) APCবৃত্তটি = ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমান।

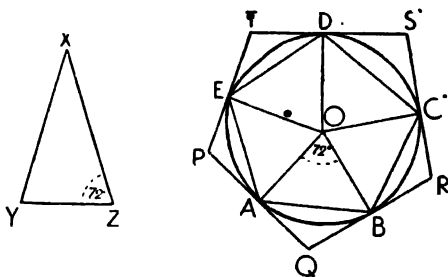
(3) BC ও CE, BCD বৃত্তে অন্তর্লিখিত দশভুজের বাহু।

(4) AP, PC ও CE, APC বৃত্তে অন্তর্লিখিত পঞ্চভুজের বাহু।

সম্পাদ্য ৩৬

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ, (১) অন্তর্লিখিত বা (২) পরিলিখিত করিতে হইবে।

[To construct a regular pentagon in or about a given circle.]

মনে কর, O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র। এই বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত করিতে হইবে।

(১) **অঙ্কন।** XYZ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার $\angle Y = \angle Z = 2\angle X = 72° = \frac{1}{5}$ of $360°$. যে-কোন ব্যাস OA অঙ্কিত করিয়া O বিন্দুতে $\angle Y$ অথবা $\angle Z$এর সমান করিয়া $\angle AOB$ অঙ্কিত কর। AB সংযুক্ত কর। AB অভীষ্ট অন্তর্লিখিত পঞ্চভুজের একটি বাহু। ABএর সমান BC, CD, DE, জ্যাত্রয় বৃত্তে পর পর স্থাপন কর। EA সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ABCDE অভীষ্ট সুষম পঞ্চভুজ।

প্রমাণ। OC, OD, OE সংযুক্ত কর।

জ্যা, $AB = BC = CD = DE$,

$\therefore$ চাপ, $AB = BC = CD = DE$,

$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 72°$,

$\therefore \angle EOA = 360° - 4 \times 72° = 72° = \angle AOB$,

$\therefore$ চাপ $EA =$ চাপ AB ।

$\therefore$ বাহু EA = বাহু AB = BC = ইত্যাদি।

$\therefore$ পঞ্চভুজটি সমবাহু।

আবার, BCDE চাপ = CDEA চাপ,

$\therefore$ $\angle EAB = \angle ABC$।

এইরূপে দেখান যায়, পঞ্চভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান।

$\therefore$ পঞ্চভুজটি সুষম, এবং ইহা বৃত্তটিতে অন্তর্লিখিত হইয়াছে।

(৩) **অঙ্কন**। ABCDE সুষম পঞ্চভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত কর, এবং উহার শীর্ষ A, B, C, D এবং E দিয়া যথাক্রমে PQ, QR, RS, ST এবং TP স্পর্শক পাঁচটি অঙ্কিত কর, উহারা যেন PQRST পঞ্চভুজটি উৎপন্ন করিল। PQRST অভীষ্ট পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইবে।

প্রমাণ। OA ব্যাসার্ধ এবং PQ, A বিন্দুতে স্পর্শক।

$\therefore$ $\angle OAQ$ = এক সমকোণ.

এইরূপ $\angle OBQ$ = এক সমকোণ,

$\therefore$ $\angle AOB + \angle AQB$ = দুই সমকোণ।

কিন্তু $\angle AOB = 72°$, $\therefore$ $\angle AQB = 180° - 72° = 108°$.

এইরূপ দেখান যাইতে পারে যে, পঞ্চভুজটির অন্য চারিটি কোণ $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$, $\angle P$ প্রত্যেকে $= 108°$,

$\therefore$ পঞ্চভুজটির কোণগুলি পরস্পর সমান।

আবার, QA = QB, $\therefore$ $\angle QAB = \angle QBA$।

এইরূপ RB = RC, $\therefore$ $\angle RBC = \angle RCB$।

$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - 72°) = \frac{1}{2} \times 108° = 54°$,

$\therefore$ $\angle QAB = \angle QBA = 90° - 54° = 36°$.

এইরূপ $\angle RBC = \angle RCB = 36°$.

এখন QAB এবং RBC ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle QBA = \angle RBC$, প্রত্যেকে $36°$

$\angle AQB = \angle BRC$, প্রত্যেকে $108°$

এবং AB = BC,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ BQ = BR, অর্থাৎ বাহু QR, B বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

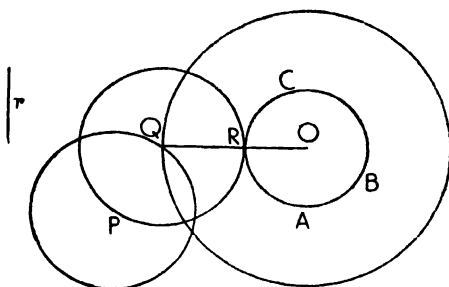
এইরূপ প্রমাণ করা যায় যে RS, ST, TP TQ যথাক্রমে C, D, E এবং A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

কিন্তু QA = QB, ∴ উহাদের দ্বিগুণ, PQ = QR.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, পঞ্চভুজটির বাহুগুলি পরস্পর সমান, অতএব ইহা সুষম। ই. উ. বি.

বিবিধ বৃত্তাঙ্কন

১। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন উহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

[To construct a circle of a given radius, to pass through a given point and to touch a given circle of given radius.]

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ = a, এবং P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ABC বৃত্তটিকে স্পর্শ করিয়া এবং P বিন্দু দিয়া r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। O কেন্দ্র করিয়া এবং $a+r$ এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। P কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন দ্বিতীয় বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। অবশেষে Q কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া চতুর্থ বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহাই অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ। OQ সংযুক্ত কর, উহা যেন ABC বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। $OQ=a+r$, কিন্তু $OR=a$, $\therefore$ $QR=r$, সুতরাং Q কেন্দ্রের বৃত্তটি ABC বৃত্তের পরিধির উপর R বিন্দু দিয়া যাইবে। কিন্তু OQ, কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগ-রেখা, সুতরাং Q বৃত্তটি ABC বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

আবার Q বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=r=$ P বৃত্তের ব্যাসার্ধ। সুতরাং Q বৃত্ত P বিন্দু দিয়া যাইবে।

অতএব Q কেন্দ্রের বৃত্তই অভীষ্ট বৃত্ত। ই. স. বি.

২। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যেন উহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে।

[To construct a circle with a given radius touching a given circle and a given straight line.]

মনে কর, O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র ও OE উহার ব্যাসার্ধ, AB নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ। বৃত্ত O এবং সরলরেখা ABকে স্পর্শ করিয়া r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। O হইতে ABএর উপর OC লম্ব টান এবং r এর সমান CD লও, D হইতে ABএর সমান্তরাল DG টান। OE বর্ধিত করিয়া r এর সমান EH

লও ; O কেন্দ্র করিয়া OH ব্যাসার্ধ লইয়া DGকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

OP সংযুক্ত কর, উহা O বৃত্তকে r বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ, ABএর উপর লম্ব টান।

P কেন্দ্র করিয়া PQ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ। DCQP একটি আয়তক্ষেত্র,

$$\therefore \quad PQ = DC = r.$$

আবার $PR = OP - OR = OH - OE = EH = r$.

$\therefore$ P কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা R এবং Q বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং O বৃত্তকে R বিন্দুতে ও AB সরল রেখাকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, কারণ ORP কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা এবং PQ, AB-এর লম্ব। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য—OH ব্যাসার্ধের বৃত্তটি DGকে আরও এক বিন্দুতে ছেদ করিবে। সুতরাং এই অঙ্কনে দুইটি অভীষ্ট বৃত্ত পাওয়া যায়।

৩। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে, এবং একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে উহার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে, স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch a given circle, and also to touch a given straight line at a given point.]

মনে কর, O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র। XY নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং A উহার উপর নির্দিষ্ট বিন্দু। একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা নির্দিষ্ট বৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে এবং XYকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। O বৃত্তের ব্যাস BOC, XYএর লম্বভাবে টান। AB সংযুক্ত কর, উহা যেন বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। A হইতে AP, XYএর লম্ব

টান, এবং OD সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে APকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

P অভীষ্ট ত্রিভুজের কেন্দ্র এবং PA উহার ব্যাসার্ধ হইবে।

প্রমাণ। BC এবং AP উভয়েই XYএর লম্ব বলিয়া উহারা সমান্তরাল,

AB উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

∴ $\angle$PAD = একান্তর $\angle$OBD,

= $\angle$ODB, (কারণ ব্যাসার্ধ OD = OB)

= বিপ্রতীপ কোণ PDA,

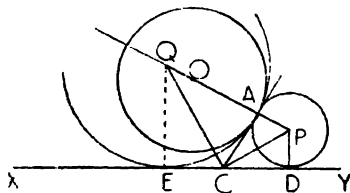
∴ PD = PA।

অতএব P কেন্দ্র করিয়া PA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়া যাইবে এবং O বৃত্তকে D বিন্দুতে এবং XYকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, কারণ, ODP কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক-রেখা, এবং PA, XYএর লম্ব। এইরূপ AC সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত AC বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করিলে, বর্ধিত EO এবং AP, Q বিন্দুতে ছেদ করিল। অনুরূপ যুক্তিদ্বারা প্রমাণ করা যায় যে, Q কেন্দ্র করিয়া QA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহাও বৃত্তটিকে অন্তঃস্থ ভাবে E বিন্দুতে এবং XYকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। প্রথম অঙ্কনে বৃত্তদ্বয় পরস্পর বহিঃস্থ ভাবে স্পর্শ করিয়াছে। ই. স. বি.

৪। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহা কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এবং কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে উহার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

[To describe a circle to touch a given straight line and also to touch a given circle at a given point.]

মনে কর, XY নির্দিষ্ট সরল রেখা, O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং A উহার পরিধির উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা XY সরল রেখাটিকে, এবং O বৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক AC টান, উহা যেন XYকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। ∠ACY সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া CP অঙ্কিত কর। OA সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত কর, উহা CPকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

P কেন্দ্র করিয়া PA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ। PD, XYএর উপর লম্ব টান।

CA স্পর্শক এবং OA ব্যাসার্ধ, ∴ ∠CAP = এক সমকোণ।

CP, ∠ACYএর সমদ্বিখণ্ডক, ∴ PA = PD।

∴ P কেন্দ্র করিয়া PA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, উহা D দিয়া যাইবে, এবং O বৃত্তটিকে বহিঃস্থভাবে A বিন্দুতে ও XY রেখাকে D বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, কারণ OAP কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা এবং PD, XYএর লম্ব।

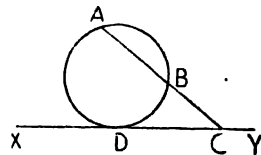
∠ACXএর সমদ্বিখণ্ডক বর্ধিত AOকে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে Q কেন্দ্র করিয়া QA ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা O বৃত্তটিকে অন্তঃস্থভাবে A বিন্দুতে এবং XY রেখাকে E বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

ই. স. বি.

৫। একটি সরল রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং ঐ সরল রেখাটিকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch a given straight line and to pass through two given points on the same side of it.]

মনে কর, XY একটি সরল রেখা এবং A ও B উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত কর যেন উহা XYকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC.BC আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর, এবং CX হইতে বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান CD অংশ ছেদ কর। A, B এবং D বিন্দুত্রয় দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; ইহাই অভীষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। $AC.BC = CD^2$,

∴ CD বৃত্তটিকে D বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

যদি CY হইতেও CDএর সমান CE লওয়া যায়, তাহা হইলে, A.B এবং E বিন্দু দিয়া অঙ্কিত আর একটি বৃত্ত XYকে E বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

ই. স. বি.

৬। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং দুইটি সরল রেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a circle to touch two given straight lines and to pass through a given point.]

মনে কর, AB, AC দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিয়া এবং নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ∠BACএর সমদ্বিখণ্ডক AO অঙ্কিত কর।

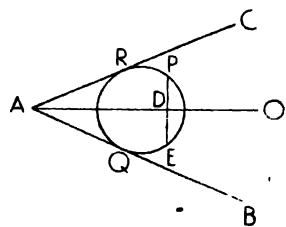
∴ অভীষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র AOএর উপর অবস্থিত হইবে।

P বিন্দু হইতে PD, AOএর উপর লম্ব টান এবং PD, E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DE = PD হয়।

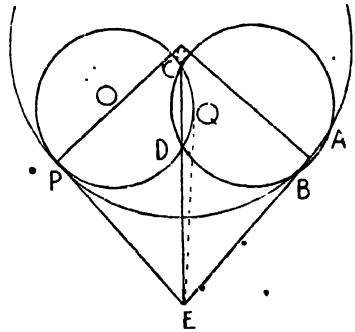
সুতরাং যে-বৃত্তের কেন্দ্র AOএর উপর অবস্থিত, উহা যদি P বিন্দু দিয়া যায়, তবে উহা Pএর প্রতিসাম্যরূপে বিপরীত বিন্দু E দিয়াও যাইবে।

এখন উপরি-উক্ত ৫এর অঙ্কনানুযায়ী P এবং E বিন্দু দিয়াও AB রেখাকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তটি AC রেখাকেও R বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, কারণ ইহার কেন্দ্র ∠BACএর সমদ্বিখণ্ডক AOএর উপর অবস্থিত।

ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট সরল রেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে উভয়ের সমদূরবর্তী সমান্তরাল রেখার উপর অভীষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থিত হইবে।

৭। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a circle to pass through two given points and to touch a given circle.]

মনে কর, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং নির্দিষ্ট PCD বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। PCD বৃত্তের পরিধিতে যে-কোন বিন্দু C লও A,B এবং C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন নির্দিষ্ট বৃত্তটিকে আবার D বিন্দুতে ছেদ করে। AB ও CD সংযুক্ত কর এবং উহারা বর্ধিত হওয়াতে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

E হইতে PCD বৃত্তের উপর EP স্পর্শক টান। AB এবং P বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর : ইহাই অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ। PCD বৃত্তের EDC ছেদক এবং EP স্পর্শক,

∵ $EP^2 = EC.\ ED$

$= EA.\ EB.$ কারণ EDC ও EBA, ABC বৃত্তের ছেদক।

∴ EP, ABP বৃত্তেরও স্পর্শক।

∴ বৃত্ত ABP বৃত্ত PCD কে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং উহা A ও B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত হইয়াছে। সুতরাং ABP অভীষ্ট-বৃত্ত।

E হইতে আরও একটি স্পর্শক EQ, PCD বৃত্তে টানা যাইত, সুতরাং A, B ও Q দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটিও PCD বৃত্তকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। ই.স.বি.

জ্যামিতিক বস্তুর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ পরিমাণ

কোনও বিন্দু চলিতে চলিতে উহার স্থান পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে কোন জ্যামিতিক বস্তুর পরিমাণ ক্রমশঃ হ্রাস বা বৃদ্ধি প্রাপ্ত হইতে পারে। কোন কোন সময় এই পরিমাণ প্রথমতঃ বৃদ্ধি প্রাপ্ত হইয়া পরে হ্রাস প্রাপ্ত হয়, কিংবা প্রথমতঃ হ্রাস প্রাপ্ত হইয়া পরে বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। সুতরাং উভয় অবস্থায়ই এরূপ একটি অবস্থান আছে যখন বৃদ্ধি কিংবা হ্রাস স্থগিত হইয়া যথাক্রমে হ্রাস এবং বৃদ্ধি আরম্ভ হয়। বিন্দুটির এই বিশেষ অবস্থানে বস্তুটি বৃহত্তম (Maximum) কিংবা ক্ষুদ্রতম (Minimum) মান প্রাপ্ত হইয়াছে, বলা যায়।

নিম্নে প্রদত্ত বিষয়গুলি সহজেই অনুমেয়ঃ—

(১) বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি সরল রেখার উপর অঙ্কিত সরল রেখাগুলির মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

(২) একটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরল রেখাগুলির মধ্যে ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসের যে অংশে কেন্দ্র আছে তাহা বৃহত্তম এবং অপরাংশ ক্ষুদ্রতম।

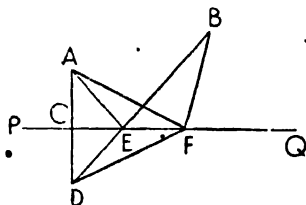
(৩) একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরল রেখাগুলির মধ্যে কেন্দ্র দিয়া অঙ্কিত রেখাটির সমগ্র রেখা বৃহত্তম এবং বৃত্তের বহির্ভাগে অবস্থিত অংশ ক্ষুদ্রতম।

(৪) ত্রিভুজের দুইটি বাহু দেওয়া থাকিলে যে ত্রিভুজে বাহুদ্বয় সমকোণে ছেদ করে তাহার ক্ষেত্রফলই বৃহত্তম।

(৫) একটি বৃত্ত অপর আর একটি বৃত্ত হইতে সম্পূর্ণ বাহিরে থাকিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক-রেখার পরিধিদ্বয় দ্বারা ছিন্ন অংশই উহাদের ক্ষুদ্রত দূরত্ব।

একটি সীমাহীন সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যে, ঐ সরল রেখার বহিঃস্থ এবং তাহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্ণেয় বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হইবে।

[To find a point in a given straight line so that the sum of its distances from two fixed points on the same side of the given line may be a minimum.]

মনে কর, PQ নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং A ও B উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। PQ এর উপর এমন একটি বিন্দু E নির্ণয় করিতে হইবে যেন AE + EB ক্ষুদ্রতম হয়।

অঙ্কন। A হইতে PQ এর উপর AC লম্ব টান ; AC, D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন CD = AC। DB সংযুক্ত কর, উহা যেন PQ কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। E অভীষ্ট বিন্দু।

প্রমাণ। PQ এর উপর যে কোন বিন্দু F লও, AE, AF, BF, DF সংযুক্ত কর।

ACE, DCE ত্রিভুজদ্বয়ের AC = CD, CE সাধারণ বাহু এবং সমকোণ ACE = সমকোণ DCE।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ AE = DE.

এইরূপে প্রমাণ করা যায়, AF = DF।

এখন BFD ত্রিভুজের (BF + FD) > BD

অর্থাৎ > (BE + ED)

অর্থাৎ > (BE + AE).

এই প্রকারে প্রমাণ করা যায়, F বিন্দু, E ভিন্ন যেখানেই অবস্থিত হউক না কেন, (AE+AB) সকল অবস্থায়ই (AF+BF) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

AE+BE ক্ষুদ্রতম। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এস্থলে AE এবং BE, XY এর সহিত সমভাবে নত।

অনুশীলনী

১। নির্দিষ্ট ভূমির উপর অঙ্কিত নির্দিষ্ট পরিসীমা-বিশিষ্ট যাবতীয় ত্রিভুজের মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

২। নির্দিষ্ট ভূমির উপর অঙ্কিত নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট যাবতীয় ত্রিভুজের মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমা ক্ষুদ্রতম।

বিবিধ অনুশীলনী

১। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া কিরূপে একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় দেখাও। এইরূপ কয়টি স্পর্শক অঙ্কিত হইতে পারে? [ক. প্র.

২। সমবাহু ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ উহার যে-কোন বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের তিন গুণের সমান। [ক. প্র.

৩। দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু A ও B দিয়া একটির পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে PAC, PBD, সরল রেখাদ্বয় টানা হইল। প্রমাণ কর যে, DC, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল। [ক. প্র.

৪। বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে রেখা টানিয়া একটি ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

৫। একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং প্রত্যেক বাহুর এক একটি বিন্দু দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। ABC সমবাহু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হইলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 3AG^2$.

৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ 120° হইলে, প্রমাণ কর যে, ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ হইবে।

৮। একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ A, BCএর উপর যে কোন বিন্দু Dএর সহিত সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে,

$$AD^2 = BD^2 + CD^2 + BD.\cdot CD.$$

৯। পরস্পর বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে এইরূপ নির্দিষ্ট ব্যাসের তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

১০। দুইটি নিদিষ্ট সরলরেখাকে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করাইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

১১। একটি বৃত্তের পরিলিখিত করিয়া একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

১২। কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে উহাদের অন্তঃকেন্দ্রত্রয় সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

১৩। কোন ত্রিভুজের একটি বাহু ও অন্তর্বৃত্ত এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ-দ্বয় দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১৪। ABC ত্রিভুজের তিনটি লম্ব AD, BE এবং CF। D হইতে AB, BE, CF এবং ACএর উপর অঙ্কিত লম্বগুলির পাদবিন্দুসমূহ একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

১৫। ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল, এবং AC ও BD উহার কর্ণদ্বয়, প্রমাণ কর যে,

$$AC^2 + BD^2 - AC^2 + BC^2 + 2\ AB.\ DC.$$

পরিভাষা

Absolute—পরম।

Acute—সূক্ষ্ম।

Acute-angled triangle—সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

Adjacent—সন্নিহিত।

Alternate—একান্তর।

Alternative proof—বিকল্প প্রমাণ।

Altitude, height—উন্নতি, উচ্চতা।

Ambiguous—দ্ব্যর্থক।

Analysis বিশ্লেষণ।

Angle—কোণ।

Angle in a segment—বৃত্তাংশস্থ কোণ।

Antecedent—পূর্বরাশি।

Answer—উত্তর।

Application—প্রয়োগ।

Approximate—স্থূল।

Approximately—স্থূলতঃ।

Approximate value—আসন্নমান।

Arc—চাপ।

Area—কালি, ক্ষেত্রফল।

Arm—ভুজ, বাহু।

Axiom—স্বতঃসিদ্ধ।

At right angles—সমকোণে নত।

Axis—অক্ষ।

Axis of projection—অভিক্ষেপাক্ষ।

Axis of symmetry—প্রতিসাম্য-অক্ষ।

Base—ভূমি।

Bisector—দ্বিখণ্ডক।

Bisection—দ্বিখণ্ডন।

Boundary—সীমা।

Breadth—প্রস্থ, বিস্তার।

Centesimal—শততমিক।

Centre—কেন্দ্র।

Centre of gravity—ভারকেন্দ্র।

Centre of inversion—বিলোমকেন্দ্র।

Centre of similitude—সাম্যকেন্দ্র।

Centroid—ভরকেন্দ্র।

Chord—জ্যা।

Circle—বৃত্ত।

Circum-centre—পরিকেন্দ্র।

Circumference—পরিধি।

Circumscribed—পরিলিখিত।

Circumscribed circle—পরিবৃত্ত।
Circum-radius– পরিব্যাসার্ধ।
Circular measure – বৃত্তীয়মান।
Close approximation—সূক্ষ্মমান।
Closed – সীমাবদ্ধ।
Co-axial—সমাক্ষ।
Coincidence—সমাপতন।
Collinear (points)—একরেখীয়।
Commensurable—প্রমেয়।
Common Tangent—
সাধারণ স্পর্শক।
Commutative law—বিনিময়
নিয়ম।
Complement—পূরক
Complementary (angle)—
পূরক।
Componendo—যোগক্রিয়া।
Concentric – এককেন্দ্রীয়।
Conclusion—সিদ্ধান্ত, উপসংহার।
Concurrent—সমবিন্দু।
Congruent—সর্বসম।
Conjugate—অনুবন্ধী, প্রতিযোগী।
Conjugate arc—প্রতিযোগী চাপ।
Constant (quantity)—ধ্রুবক।
Consequent—উত্তররাশি।
Contact—স্পর্শ।
Construction—অঙ্কন।

Converse—বিপরীত।
Converse proposition—বিপরীত
প্রতিজ্ঞা।
Convex – প্রবৃদ্ধ-কোণশূন্য।
Co-ordinates—স্থানাঙ্ক।
Corrolary – অনুসিদ্ধান্ত।
Corresponding—অনুরূপ।
Cube—ঘনক্ষেত্র, ঘনফল, ঘন।
Curve—রেখা।
Curved—বক্র।
Cyclic—বৃত্তস্থ।
Data—উপাত্ত।
Decagon – দশভুজ।
Decimal – দশমিক।
Deduction— সিদ্ধান্ত।
Degree—অংশ, ডিগ্রি, মান।
Dinominator—হর।
Depression – অবনতি।
Diagonal—কর্ণ।
Diagonal scale—কর্ণমাপনী।
Diameter—ব্যাস।
Difference—অন্তর।
Digit—অঙ্ক।
Direct (tangent)—সরল।
Direct proof—অন্বয়ী প্রমাণ।
Direction—দিক্।

Directly similar—সমানুরূপ।
Distributive law—বিচ্ছেদ নিয়ম।
Distance—দূরত্ব, ব্যবধান।
Direct common tangent—সরল সাধারণ স্পর্শক।
Dividendo—ভাগক্রিয়া।
Enunciation—নির্বচন।
Equiangular—সদৃশকোণী।
Equidistant—সমদূরবর্তী।
Equilateral—সমবাহু।
Equivalent—তুল্য।
Escribed—বহির্লিখিত।
Example—উদাহরণ।
Ex-centre—বহিঃকেন্দ্র।
Ex-circle—বহির্বৃত্ত।
Exercise—প্রশ্নমালা, অনুশীলনী।
Explanation—ব্যাখ্যা।
Exterior angle—বহিঃকোণ।
External—বহিঃস্থ।
External bisector—বহি-দ্বিখণ্ডক।
Extreme—প্রান্তীয়।
Even—সম।
Figure—চিত্র।
Formula—সূত্র।
Fraction—ভগ্নাংশ।
Geometric series—গুণোত্তর শ্রেণী।
Grade—গ্রেড।
Gradient—নতিমাত্রা।
Graph—লেখ।
Graphical—লৈখিক।
Harmonic series—বিপরীত শ্রেণী।
Harmonic (section)—সমঞ্জস।
Height—উচ্চতা, উন্নতি।
Heptagon—সপ্তভুজ।
Hexagon—ষড়ভুজ।
Hypotenuse—অতিভুজ।
Hypothesis—কল্পনা।
Horizontal—অনুভূমিক।
Identical—একরূপ।
Identically equal—সর্বতোভাবে সমান।
Illustration—দৃষ্টান্ত।
Image—বিম্ব।
Inclination—নতি।
Incommensurable—অমেয়।
Incentre—অন্তঃকেন্দ্র।
Incircle—অন্তর্বৃত্ত।
Included angle—অন্তর্ভূত কোণ।
Independent—স্বাধীন।
Inequality—অসমতা।
Infinite, Infinity—অসীম, অনন্ত।
In-radius—অন্তর্ব্যাসার্ধ।

Integer—পূর্ণসংখ্যা।
Internal—অন্তঃস্থ।
Internal bisector—অন্তর্দ্বিখণ্ডক।
Intersection—ছেদ, প্রতিচ্ছেদ।
Inscribed—অন্তর্লিখিত।
Inverse—ব্যস্ত, বিপরীত।
Inverse ratio—ব্যস্ত অনুপাত।
Inversely similar—ব্যস্ত অনুরূপ।
Inversion—বিলোম ক্রিয়া।
Invertendo—বিপরীতক্রিয়া।
Irrational—অমূলদ।
Irregular—বিষম।
Isosceles—সমদ্বিবাহু।
Length—দৈর্ঘ্য।
Limit—সীমা।
Limiting point—পরিণাম-বিন্দু।
Line—রেখা।
Locus—সঞ্চারপথ।
Magnitude—মান, পরিমাণ।
Major arc—অধিচাপ।
Mean—মধ্যক, সমক।
Median—মধ্যমা।
Measure—সাংখ্যমান।
Minor arc—উপচাপ।
Minimum—অবম, অল্পতম।
Minute—কলা, মিনিট।
Miscellaneous—বিবিধ।
Maximum—চরম, বৃহত্তম।
Negative—ঋণ, ঋণাত্মক, নেগেটিভ।
Normal—অভিলম্ব।
Note—দ্রষ্টব্য, অবধেয়।
Number—সংখ্যা।
Numerator—লব।
Observation—পর্যবেক্ষণ।
Obtuse angle—স্থূলকোণ।
Octagon—অষ্টভূজ।
Odd—অযুগ্ম, বিষম।
Opposite—বিপরীত।
(Vertically) opposite—বিপ্রতীপ।
Ordinate—কোটি।
Origin—মূলবিন্দু।
Orthocentre—লম্ববিন্দু।
Orthogonal—সমকোণীয়।
Orthogonal projection—লম্ব-অভিক্ষেপ।
Parallel—সমান্তরাল।
Parallelogram—সামন্তরিক।
Pedal triangle—পাদ-ত্রিভূজ।
Pentagon—পঞ্চভূজ।
Perimeter—পরিসীমা।
Perpendicular—লম্ব।
Plane—সমতল।

Plotting—অঙ্কন।
Point—বিন্দু।
Point of concurrency—সম্পাত-বিন্দু।
Polygon—বহুভুজ।
Polar—মেরুরেখা।
Pole—মেরু।
Positive—ধন, পজিটিভ।
Position—অবস্থান, অবস্থিতি।
Postulate—স্বীকার্য।
Practical—ব্যবহারিক।
Problem—প্রশ্ন, সম্পাদ্য।
Process—প্রক্রিয়া, পদ্ধতি।
Progression—প্রগতি।
Projected—অভিক্ষিপ্ত।
Projection—অভিক্ষেপ, প্রক্ষেপ
Proof—প্রমাণ।
Property—ধর্ম।
Proposition—প্রতিজ্ঞা।
Proportion—সমানুপাত।
Proportional—সামানুপাতিক।
Proved—প্রমাণিত।
Quadrant—পাদ।
Quadrilateral—চতুর্ভুজ।
Quantity—রাশি।
Question—প্রশ্ন।
Radian—রেডিয়ান।
Radical axis—মূলাক্ষ।
Radical centre—মূলকেন্দ্র।
Radius—অর, ব্যাসার্ধ।
Radius of inversion—বিলোম-ব্যাসার্ধ।
Ratio—অনুপাত।
Rational—মূলদ।
Reciprocal—বিপরীত।
Reciprocal (figure)—অন্যোন্য।
Rectangle—আয়ত, আয়তক্ষেত্র।
Rectilinear figure—ঋজুরেখক্ষেত্র।
Reflex angle—প্রবৃদ্ধ কোণ।
Regular—সুষম।
Relative—আপেক্ষিক।
Rhombus—রম্বস।
Right angle—সমকোণ।
Ruler—মাপনী, রুলার।
Scale—স্কেল, মাপনী।
Scalene—বিষমভুজ।
Secant—ছেদক, সেকাণ্ট্।
Second—সেকেণ্ড, বিকলা।
Section—ছেদ।
Sector—বৃত্তকলা।
Segment (of a circle)—বৃত্তাংশ।
Segment (of a line)—খণ্ড, অংশ।

Self-conjugate—সাত্মবদ্ধ।
Self-evident—স্বতঃপ্রমাণ।
Semi—অর্ধ।
Semi-circle—অর্ধবৃত্ত।
Series—শ্রেণী।
Sexagesimal ষষ্টিক।
Side—ভুজ, বাহু।
Sign—চিহ্ন।
Similar (triangle)—সদৃশ।
Similarity—সাদৃশ্য।
Similitude—সাম্য।
Size—আয়তন।
Slope—নতি।
Solid—ঘন, ঘনবস্তু।
Solution—সমাধান।
Space—স্থান।
Squared paper—ছক কাগজ।
Square—বর্গক্ষেত্র।
Straight—সরল, ঋজু।
Straight angle—সরলকোণ।
Subtended angle—সম্মুখ কোণ।
Superposition—উপরিপাত।
Supplementary—সম্পূরক।
Surface—তল।
Symbol—প্রতীক, চিহ্ন।
Symmetry—প্রতিসাম্য।
Synthesis—সংশ্লেষণ।
Table—সারণী, তালিকা।
Tangent—স্পর্শক, ট্যানজেন্ট্।
Theorem—উপপাদ্য।
Theoretical—তত্ত্বীয়, বাদীয়।
Transversal—ভেদক।
Transverse (tangent)—তির্যক।
Trapezium—ট্রাপিজিয়ম।
Triangle—ত্রিভুজ, ত্রিকোণ।
Trigonometry—ত্রিকোণমিতি।
Trigonometrical ratios—কোণানুপাত।
Trisection—ত্রিখণ্ডন।
Unit—একক।
Unlike—অসদৃশ।
Value—মান।
Variable—চল।
Variation—ভেদ।
Vers—ভার্স্।
Vertex—শীর্ষ।
Vertical—উল্লম্ব।
Vertical angle—শিরঃকোণ।
Vertically opposite (angle)—বিপ্রতীপ (কোণ)।
Volume - ঘনফল।
Work —কার্য, কর্ম

Calcutta University & Dacca Board

Matriculation and High School Examination Questions.

C. U. = Calcutta University Compulsory.

C. U. A. = Calcutta University Additional.

D. B. = Dacca Board Matriculation or High School Examination Questions (Compulsory).

D. B. A. = Dacca Board Matriculation or High School Examination Questions (Additional).

Theorems.

1. *Theorem 3.* C. U. 1911, 29.

(1) If the straight lines AB, CD intersect at O, prove that the bisector of the angle AOC, when produced through O, also bisects the angle BOD.

2 *Theorem 4.* C. U. 1918, 21.

(1) ABCDEF is a regular hexagon, shew that ACE is an equilateral triangle.

3. *Theorem 5.* C. U. 1914, 20, 23, 26 ; D. B. 1940.

(1) If two isosceles triangles stand on the same base and on the same side of it, show that one will fall entirely within the other. C.U. 1914.

(2) AB, AC are equal sides of an isosceles triangle ; D, E, F are the middle points of AB, BC, CA respectively. Prove that DE is equal to EF, and the angles ADE, AFE are equal. C.U. 1920

(3) If a four-sided figure be equilateral, prove that its opposite angles are equal. C. U. 1923

4. *Theorem 6.* C. U. 1917, 24 ; D. B. 1933.

(1) If the base of a triangle is produced both ways and exterior angles thus formed are equal, prove that the triangle is isosceles. C. U. 1924.

(2) The hypotenuse of a right-angled triangle is double the median which bisects the hypotenuse. D. B. 1933.

5. *Theorem* 7. C. U. 1912, 16, 22, 35 ; D. B. 1925, 28, 31.

(1) Show that the line joining the vertex to the middle point of the base of an isosceles triangle is at right angles to the base and bisects the vertical angle. C. U. 1912 ; D. B: 1928.

(2) Prove that a diagonal of a rhombus bisects each of the angles through which it passes. C. U. 1916.

(3) Prove that the diagonals of a square bisect each other. C. U. 1922.

(4) The diagonals of a rhombus bisect each other at right-angles. D. B. 1925.

(5) Shew that the line joining the centre of a circle to the middle point of any chord is perpendicular to the chord D.B. 1931.

6. *Theorem* 8. C. U. 1932 ; D. B. 1939.

(1) Show that it is impossible to draw more than two equal straight lines from a given point to a given straight line. C. U. 1932 ; D. B. 1939.

7. *Theorem* 9. C. U. 1915, 18, 34.

(1) ABCD is a quadrilateral, with AD its greatest side and BC its least side. Prove that the angle at C is greater than the angle at A. C. U. 1918

8. *Theorem 10*. C. U. 1928.

(1) Prove that the hypotenuse is the greatest side of a right-angled triangle. C. U. 1915, 28.

9. *Theorem 11*. C. U. 1913, 20, 23, 25, 27, 31, 34 ; D. B. 1927, 29, 32, 34, 38, 39.

(1) Show that any three sides of a quadrilateral are together greater than the fourth. C. U. 1913.

(2) The sum of the four sides of any quadrilateral is greater than the sum of the two diagonals. C. U. 1920 ; D. B. 1929, 38.

(3) Prove that any two sides of a triangle are together greater

than twice the median drawn to the third side. C. U. 1923; D. B. 1932.

(4) Two sides of a triangle are 2 and 3, show that the third side is less than 5 but greater than 1. C. U. 1925.

(5) Prove that the sum of the distances of any point from the three angular points of a triangle is greater than half its perimeter. C U. 1927.

(6) If from the ends of a side of a triangle two straight lines are drawn to a point within the triangle, then these straight lines are together less than the other two sides of the triangle. D. B. 1927.

(7) The difference of any two sides of a triangle is less than the third side. C. U. 1931, 34; D. B. 1939.

(8) Prove that the perimeter of a triangle is greater than the sum of its medians. D. B. 1934.

10. *Theorem 13.* C. U. 1916; D. B. 1925, 1936.

(1) Show that two equilateral triangles standing on opposite sides of the same base form a parallelogram. C. U. 1916.

(2) Prove that two straight lines which are perpendicular to the same straight line are parallel to each other. C. U. 1917.

(3) If the diagonals of a quadrilateral bisect each other, the figure is a parallelogram. D. B. 1925.

(4) If the opposite angles of a quadrilateral are equal, the figure is a parallelogram. D. B. 1936.

11. *Theorem 14.* C. U. 1932, D. B. 1926, 34.

(1) If the straight line which bisects an exterior angle of a triangle is parallel to the opposite side, the triangle is isosceles. D. B. 1926.

(2) Hence deduce (i) The exterior angle of a triangle is equal to the sum of the two interior opposite angles of the triangle; (ii) Three angles of a triangle are together equal to two right angles. D. B. 1934.

(3) If the three sides of a triangle are parallel to the three sides of another, the corresponding angles are equal. C. U. 1932.

12. *Theorem 15.* C. U. 1917.

13. *Theorem 16.* C. U. 1910, 13, 15, 19, 26, 28, 30, 36; D. B. 1924, 27, 32, 34, 35, 37, 40.

(1) Prove that the six angles of any two equilateral triangles are equal to one another. C. U. 1910.

(2) Show that the sum of the angles of a quadrilateral is equal to four right angles. C. U. 1913; D. B. 1927.

(3) Of four angles of an ordinary plane quadrilateral, which is not a rectangle, prove that at least one must be acute and one obtuse. C. U. Addl. 1914.

(4) If one side of a triangle be produced the exterior angle is equal to the sum of the two interior opposite angles.

C. U. A. 1914. C. U. 1922.

(5) Prove that if a triangle has two of its sides equal and one angle is 60°, it is equilateral. C. U. 1917.

(6) Prove that in a right-angled triangle the straight line joining the right angle to the middle point of the hypotenuse is equal to half the hypotenuse. C. U. 1919.

(7) ABC is a triangle, the angles at whose base BC are equal; these angles are bisected by BO and CO and BO is produced. Prove that the exterior angle at O is equal to either of the base angles of the triangle ABC. C. U. 1919.

(8) Prove that the angles at the base of an isosceles triangle are acute. C. U. 1926.

(9) The sum of the base angles of a triangle is 108° and their difference is 128°; find the angles of the triangle. C. U. 1926.

(10) If one angle of a triangle is equal to the sum of the other two, the triangle is right-angled. C. U. 1928.

(11) ABC is an isosceles triangle of which the side AB is equal to AC. BA is produced to D so that AD is equal to AB. Prove that BCD is a right angle. D. B. 1932.

14. *Theorem 16.* Cor. 1. D. B. 1935.

(1) Find the sum of the interior angles of a pentagon.
C. U. 1915.

(2) Find the value of an interior angle of a regular hexagon.
D. B. 1924.

(3) Find in degrees each angle of a regular polygon of five sides. Give reasons for your answer. C. U. 1930.

(4) One of the angles of a pentagon is a right angle, the other four angles are equal to each other. How many degrees are there in each? D. B. 1937,

(5) Four angles of an irregular pentagon are 50°, 80°, 130° and 140°; find the fifth angle. D. B. 1940.

15. *Theorem 17.* C. U. 1919, 29, 31; D. B. 1926, 35.

(1) If from the extremities of the base BC of an isosecles triangle perpendiculars BX and CY are drawn to the opposite sides intersecting at O, show that the triangle BCO is isosceles.
D. B. 1926.

(2) The triangle ABC has the angles at B and C equal. Show that the bisectors of these equal angles terminated by the opposite sides are equal. C. U. 1929.

(3) A diagonal of a parallelogram is bisected and through the point of bisection a straight line is drawn to be terminated by one pair of opposite sides. Show that the straight line is bisected at the point. C. U. 1931.

(4) If two triangles have two sides of one equal respectively to two sides of the other and the angles opposite to one pair of equal sides are equal, then the angles opposite to the other pair of equal sides are either equal or supplementary and in the former case the two triangles are equal in all respects. D. B. 1936.

16. *Theorem 18.* C. U. A. 1912. D. B. 1930.

(1) Hence deduce the perpendicular from the vertex of an isosceles triangle bisects the base and also the vertical angle.
C. U. A. 1912.

(2) If perpendiculars drawn from the extremities of one side of a triangle to the other two sides are equal, prove that the triangle is an isoscels triangle. D. B. 1930.

17. *Theorem 19.* C. U. 1911, 24, 27 ; D. B. 1924, 27.

(1) If the opposite sides of a quadrilateral are equal the figure is a parallelogram. C. U. 1911. D. B. 1924.

(2) If the diagonals of a parallelogram are equal prove that it is a rectangle. C. U. 1924.

(3) Prove that the diagonals of a parallelogram bisect each other. C. U. 1926.

(4) If the diagonal AC of a parallelogram ABCD bisects the angle A, show that it bisects the angle C and the parallelogram is a rhombus. C. U. 1926.

(5) If the diagonals of a quadrilateral bisect each other, the figure is a parallelogram. D. B. 1927.

(6) One angle of a parallelogram is a right angle, prove that it is a rectangle. C. U. 1927.

(7) Prove that the diagonals of rhombus bisect each other at right angles. C. U. 1935.

(8) If the opposite angles of a quadrilateral are equal the figure is a parallelogram. D. B. 1936.

18. *Theorem 20.* D. B. 1938.

(1) Prove that the straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and half of it. C. U. 1917, 34 ; D. B. 1933, 38, 40.

(2) Prove that the straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and divides the triangle in the ratio of 3:1. D. B. 1934.

(3) If the middle points of the adjacent sides of any quadrilateral are joined the figure thus formed is a parallelogram.

D. B. A. 1928.

19. (1) Shew that the perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent. D. B. 1926.

(2) The three medians of a triangle cut one another at a point of trisection, the greater segment in each being towards the angular point. C. U. A. 1924. D. B. A. 1937.

(3) Prove that the bisectors of the angles of a triangle are concurrent. D. B. 1936.

20. *Theorem 22.* D. B. 1937,

(1) ABCD is a parallelogram and P is a point inside it. Prove that the sum of the areas of the triangles PAB and PCD is half the area of the parallelogram. D. B. 1937.

21. *Theorem 23.* C. U. 1930 ; D. B. 1924, 37.

(1) ABCD is a parallelogram and P is a point inside it. Prove that the sum of the areas of the triangles PAB and PCD is half the area of the parallelogram. C. U. 1930. D. B. 1937.

22. *Theorem 24.* C. U. 1936, 39 ; D. B. 1927. 29, 35, 36.

(1) ABC is a triangle and P and Q are the middle points of the sides AB and AC ; show that if BQ and CP intersect at O the triangle BOC is equal to the quadrilateral APOQ. D. B. 1927.

(2) Two triangles have two sides of one equal respectively to two sides of the other but the angles contained by them are supplementary ; shew that the triangles are equal in area. Can such triangles ever be identically equal ? D. B. 1929.

(3) Show that the straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to each of the parallel sides. C. U. 1936.

23. *Theorem 24.* Cor. C. U. 1912, 15, 35 ; D. B. 1935.

(1) Prove that a parallelogram is divided by its diagonals into four triangles of equal area. C. U. 1915 ; D. B. 1935.

(2) Prove that if two triangles have the same altitude but unequal bases, that which stands on the greater base has the greater area.

24. *Theorem 25.* C. U. 1917 ; D. B. 1933.

(1) Prove that the line joining the middle points of any two sides of a triangle is parallel to the third side. D. B. 1933.

25. *Theorem 26.* C. U. 1921, 33. D. B. 1938.

(1) If any point P be joined to A, B, C, D, the angular points of a rectangle, show that the squares on P A and P C are together equal to the squares on PB and PD. C. U. 1921.

(2) Prove that in an equilateral triangle four times the square on the perpendicular drawn from a vertex on the opposite side is equal to three times the square on any side. C. U. 1933.

(3) Describe a square equal to three times a given square in area. D. B. 1938.

26. *Theorem 27.* C. U. A. 1919.

27. *Theorem 30.* C. U. 1918, 32 ; C. U. A. 1933 ; D. B. 1931.

(1) Show that two chords of a circle cannot bisect each other unless both of them pass through the centre. C. U. 1938.

28. *Theorem 31.* C. U. 1933.

(1) Prove that two different circles cannot cut each other at more than two points. C. U. 1933.

29. *Theorem 32.* C. U. 1913, 21, 26, 33, 35, 37 ; D. B. 1927, 35.

(1) Find the locus of the middle points of equal chords of a circle. C. U. 1913, 21, 33 ; D. B. 1935.

(2) AB and AC are two equal chords of a circle, show that the bisector of the angle BAC passes through the centre. C. U. 1926.

(3) AB is a fixed diameter of a circle and PA is a chord of constant length. Prove that the sum or difference of perpendiculars drawn from A and B on PQ or PQ produced is the same for all positions of the chord within the circle. D. B. 1927.

(4) Two equal chords of a circle intersect in a point. Show that the segments of the one are equal respectively to the segments of the other. C. U. A. 1935.

30. *Theorem 33.* C. U. 1935.

(1) Through a given point within a circle draw the least possible chord. C. U. 1935.

31. *Theorem 34.* C. U. 1928, 34, 38 ; D. B. 1934.

(1) L is any point on the arc PM of a circle. The angles LPM and LMP are bisected by straight lines which intersect at O. Find the locus of the point O. C. U. 1934.

(2) Hence deduce that (i) angles in the same segment of a circle are equal, (ii) the angle in a semicircle is a right angle. D. B. 1934.

(3) If two chords AB and CD of a circle intersect at a point E inside the circle, show that the angles subtended by AC and AD at the centre are together double of the angle AEC. C. U. 1938.

32. *Theorem 35.* C. U. 1911, 21, D. B. 1927, 39.

(1) If the line joining two points subtend equal angles at two other points on the same side of it, show that the four points lie on a circle. C. U. 1921. (Th. 36).

(2) AB is a fixed chord of a given circle and P is any point on the circumference. Show that the bisector of the angle, APB passes through one or other of two fixed points. C. U. A. 1923.

(3) The vertex A of a triangle BAC moves on an arc of a circle passing through B and C. Prove that the locus of the intersection of the bisectors of the angles at B and C is an arc of another circle through the same two points. D. B. 1927.

33. *Theorem 36.* D. B. 1937.

(1) Show that the middle points of the sides of a triangle and the foot of the perpendicular let fall from one vertex on the opposite side are concyclic. D. B. 1937 ; D. B. A. 1927, 29.

34. *Theorem 37.* C. U 1911, 15, 20, 24, 25 ; D. B. 1928, 36.

(1) Through each of the points of intersection of two circles straight lines are drawn cutting one circle in A and B, and the other in C and D. Prove that AB is parallel to CD. C. U. A. 1911.

(2) If a circle can be described about a parallelogram, show that the parallelogram must be a rectangle. C. U. 1915, 20.

(3) Prove that the internal bisector of any angle of a cyclic quadrilateral and the external bisector of the opposite angle intersect on the circle. C. U. 1924. D. B. 1928.

(4) Prove that the perpendiculars from the angular points of a triangle to the opposite sides are concurrent.

(5) If one side of a cyclic quadrilateral is produced, prove that the exterior angle is equal to the opposite interior angle of the quadrilateral. D. B. 1936.

35. *Theorem 38.* C. U. 1923 ; D. B. 1930. D. B. A. 1927, 29, 34, 38.

(1) Equilateral triangles are described on the three sides of a triangle externally and circles are circumscribed about these equilateral triangles. Prove that they meet in a common point C. U. 1923. C. U. A. 1925.

(2) Show that the internal bisectors of the angles of any quadrilateral form a cyclic quadrilateral. C. U. 1925.

(3) ABCD is a quadrilaterial in which a pair of opposite angles are supplementary. If AC bisects the angle BAD, show that BC equals CD. D. B. 1930.

(4) From a point in a diagonal of a square, straight lines AB, CD are drawn parallel to the sides meeting them at the points A, B, C and D. Apply the above theorem to show that these four points are concyclic. D. B. 1934.

(5) The opposite sides of a cyclic quadrilateral are produced to meet. Show that the bisectors of the two angles so formed are perpendicular to one another. D. B. A. 1938.

36. *Theorem 39.* C. U. 1911, 17, 27 ; C. U. A. 1923, 29 ; D. B. 1934.

(1) Find the locus of the intersection of two straight lines which are not at right angles and pass through two fixed points. C. U. 1917.

(2) A variable straight line passes through a fixed point. Find the locus of the foot of the perpendicular drawn to it from another fixed point. C. U. 1922.

(3) A circle is described on the hypotenuse of a right-angled triangle as diameter. Prove that the circle passes through the opposite angular point. C. U. 1929.

37. *Theorem 41.* C. U. 1928.

(1) Two equal circles intersect at A and B; through A a straight line PAQ is drawn terminated by the circumferences. Show that BP = BQ. C. U. 1928.

38. *Theorem 41.* C. U. 1916, 18, 22, 30, 32, D. B. 1926, 29.

(1) What is the locus of the centre of a circle which touches a given straight line at a given point? C. U. 1916.

(2) Show that all chords parallel to the tangent at any point of a circle are bisected by the radius through the point. C.U. 1918.

(3) Find the locus of a point from which the tangent drawn to a given circle are of given length. C. U. 1922.

(4) AB is any chord of a circle, AC the diameter through A, and AD the perpendicular on the tangent at B; Show that AB bisects the angle DAC. D. B. 1926.

(5) If the circumference of a circle is divided into three equal arcs, the tangents drawn to the circle at the points of trisection form an equilateral triangle. C. U. 1929.

(6) Prove that two parallel tangents to a circle intercept on any third tangent a segment which subtends a right angle at the centre. D. B. 1929.

(7) The radius of a given circle is ·5 inches. Prove that all points from which the tangents drawn to the circle are of constant length 2 inches, lie on a circle. Draw a diagram as accurately as you can. C. U. 1930.

(8) Show how to draw a tangent to a given circle parallel to a given straight line. How many such tangents are possible?
C. U. 1932.

39. *Theorem 46, 47* ; C. U. 1913, 26 29, 31.

(1) Two circles touch externally at A and a straight line touches the circles at B and C. Prove that BAC is a right angle.
C. U. A. 1913

(2) OA, OB are two fixed tangents to a circle. PQ is any other tangent cutting OA, OB at P and Q. Prove that PQ subtends a constant angle at the centre of a circle. C. U. 1923.

(3) Show that the centre of any circle touching two intersecting straight lines lies on the bisector of the angle between them. C. U. 1926.

(4) A quadrilateral is described touching a circle. Prove that the sum of any pair of opposite sides is equal to the sum of the other pair. C. U. 1931.

39 (a). *Theorem 48.* C. U. 1912 ; D. B. 1934. 35.

(1) If any number of circles pass through the same point and touch one another at that point, prove that their centres all lie in one straight line. O. U. 1912.

(2) Find the locus of the centres of circles which touch two concentric circles. D. B. 1934.

(3) A and B are the centres of two fixed circles which touch internally. If P is the centre of any circle which touches the larger circle internally and the smaller externally, prove that AP+BP is constant. D. B. 1935.

40. *Theorem 49.* C. U. 1924 C. U. A. 1915, 20 D. B. 1932, 36, 38 D. B. A. 1935.

(1) Use the above theorem to prove that the tangents to a circle from an external point are equal. D. B. 1936, 38.

(2) Two circles touch each other internally and a straight line is drawn to cut them. Prove that the parts of it intercepted between the circles subtend equal angles at the point of contact. C. U. 1924.

(3) A tangent is drawn parallel to a chord ; show that the intercepted arc is bisected at the point of contact. D. B. 1932.

41. State and prove the geometrical theorem corresponding to the algebraical identity $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. C. U. 1913, 20, 31, D. B. 1928, 30. 36.

(1) In a right-angled triangle, if a perpendicular is drawn from the right angle to the hypotenuse, the square on this perpendicular is equal to the rectangle contained by the segments of the hypotenuse. C. U. 1920, 35 ; D. B. 1928.

(2) Prove that in a right-angled triangle four times the sum of the squares on the medians drawn from the acute angle is equal to five times the square on the hypotenuse. D. B. 1930.

(3) Prove that the square on a straight line is equal to four times the square on half the line. C. U. 1931..

42. State and prove the geometrical theorem corresponding to the algebraical identity $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. C. U. 1916 ; D. B. 1934.

(1) A straight line is divided into two parts ; show that if twice the rectangle of the parts is equal to the sum of the squares described on the parts, the staight line is bisected. C. U. 1916.

43. State and prove the geometrical theorem correspoding to the algebraical identity $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ C. U. 1910, 14. 19, 30; C. U. A. 33, D. B. 1925. 31, 33, 37, 36, 39.

(1) ABC is a triangle in which AB = AC, and D is any point in BC. Prove that $AB^2 - AD^2 = BD. DC$. D. B. 1931.

(2) If a straight line is bisected and also divided into two unequal segments, the rectangle contained by those segments is equal to the difference of the squares on half the line and on the line between the points of section. D. B. 1933.

(3) If the diagonal AC of a rhombus ABCD is produced to any point P, prove that $PB^2 - AB^2 = PA. PC$.

44. *Theorem 54.* D. B. 1939 ; D. B. A. 1933, 36.

(1) Prove that the locus of a point which moves in such a manner that the sum of the squares of its distances from two fixed points remains constant is a circle. D. B. A. 1936.

(2) The triangle, whose sides are 2"; 3" and 4", is an obtuse-angled triangle. C. 1933.

45. *Theorem 55.* C. U. 1911 ; C. U. A. 20 ; D. B. 1932, 34 ; D. B. A. 1933, 36.

(1) Show that the square on any straight line drawn from the vertex of an isosceles triangle to the base is less than the square on one of the equal sides by the rectangle contained by the segments of the base. C. U. 1919 C. U. A. 1933.

(2) If any point P be joined to A, B, C, D the angular points of a rectangle, show that the squares on PA and PC are together equal to the squares on PB and PD. C. U. 1921.

(3) In a triangle ABC, AD is the perpendicular from A on BC, and O is the middle point of BC. Prove that $AB^2 - AC^2 = 2BC.OD$. C. U. 1930.

46. *Theorem 56.* C. U. 1935. C. U. A. 1933. D. B. A. 1925, 30, 38.

(1) ABC is a triangle and D is the middle point of AB, prove that $CA^2 + CB^2 = 2(AD^2 + CD^2)$. C. U. 11. C. U. A. 31.

(2) Prove that the sum of the squares on the sides of a parallelogram is equal to the sum of the squares on its diagonals. C. U. 1919, 31.

(3) Show that the sum of the squares on the sides of a quadrilateral is greater than the sum of the squares on its diagonals by four times the square on the straight line which joins the middle points of the diagonals. C. U. A. 1924.

(4) Three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians. C. U. A. 1933.

(5) If a straight line is bisected at X and also divided internally into two unequal segments at Y, shew that $AY^2 + YB^2 = 2(AX^2 + XY^2)$. D. B. A. 1925.

(6) ABC is a triangle and O the point of intersection of its medians ; shew that $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$. D. B. A. 1930.

(7) The sides AB, AD of a parallelogram ABCD are bisected at L, M ; C is joind to L and M. Prove that $8(CL^2 + CM^2) = 9AC^2 + BD^2$. D. B. A. 1938.

47. *Theorem 57*. C. U. 1935. C. U. A. 1934. D. B. 1926, 38. D. B. A. 1925.

(1) A semi-circle is described on AB as diameter and two chords AC, BD are drawn intersecting at P. Prove that $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. D. B. 1938.

(2) If two straight lines AB, CD intersect at X, so that XA : XC = XD : XB, then the points A, D, B, C are concyclic. D. B. A. 1926, 37.

48. *Theorem 58*. C. U. 1912, 17, 25. D. B. A. 1930

(1) If two chords AB, CD of a circle intersect at a point O outside it and if OB be equal to OD, prove that AB is equal to CD. C. U. 1917.

(2) Two circles intersect at A and B, shew that AB produced bisects their common tangent. C. U. 1919.

(3) Prove that two tangents to a circle which can be drawn from an external point are equal. C. U. 1925

(4) ABC is a triangle right-angled at C, and from C a perpendicular CD is drawn to the hypotenuse ; shew that $AB.AD = AC^2$. D. B. A. 1930.

(5) Show that if two circles intersect, tangents drawn to them from any point in their common chord produced are equal. C. U. 1934

(6) The altitudes BE, CF of a triangle ABC intersect at H. Prove that (i) AF.AB = AE.AC, (ii) BH.BE = BF.BA. D. B. A. 1935

49. *Theorem 59* C. U. 1919

Problems

Problem 4. (with statement & justification)......C. U. 1918

Problem 6. Do ......C. U. 1918

Problem 7. C. U. 1930

(1) Construct a triangle whose sides are 3, 4 and 6 inches. Construct a perpendicular to the longest side from the vertex opposite to it. C. U. 1910, 12

(2) Construct a triangle whose sides are 5, 12 and 13 inches. Measure the angle opposite to the longest side and the length of the perpendicular on it from the opposite angle. C. U. 1911

(3) Construct a triangle whose sides are 3, 4 and 5 inches. Bisect any two of the angles and draw a perpendicular from the intersection of the bisectors on any of the sides. Measure the length of the perpendicular. C. U. 1915.

(4) Draw an equilateral triangle of which each side is 4 inches. Draw the bisector of two interior angles and through the point of intersection of the bisectors draw a parallel to one of the sides to meet the other two sides. Measure the length of this parallel line. C. U. 1916

(5) Construct a triangle ABC having its sides AB, BC, CA equal to 2·5, 3, 2·5 inches respectively. Draw AD perpendicular to BC. Measure the length of AD. (Traces of construction should be shown). D. B. 1928

Problem 8. C. U. 1922, D. B. 1936.

(1) Construct a triangle having given the base and the sum of the remaining sides. C. U. 1920

(2) Take a straight line AB 2·5″ long. At A make an angle BAC equal to 60°, and at B draw BC perpendicular to BA, meeting AC in C. Bisect AC at D. Measure BD. D. B. 1932

(3) Draw a right-angled triangle, given that the hypotenuse $c = 10 \cdot 6$ cm. and one side $a = 5 \cdot 6$ cm. Measure the third side and find the value of $\sqrt{c^2 - a^2}$ D. B. 1936

(4) Construct a triangle ABC having BC = 4″, ∠B = 30°. ∠C = 90°, forming the angles by geometrical construction, Describe a circle to pass through the mid-points of the sides. Measure the radius of the circle. Measure also AB, AC.

D. B. 1937

(5) Construct a triangle having given two angles (60° and 30°) and a side (2″) opposite to one of them (30°).

Measure the length of the greatest side.

Problem 9. C. U. 1936. D. B. 1934.

Discuss the cases when there will be (i) one solution (ii) two solutions, (iii) no solution.

(1) Construct a triangle having given ∠ABC = 34°, AC = 5·5 cm., AB = 8·5 cm. Show that there are two positions for C (C_1, and C_2). Find by measurement the sum of the angles AC_1B and AC_2B. D. B. 1940.

Problem 11. C. U. 1924, 1934.

(1) Draw a quadrilateral having given AB = 2·8″, BC = 3·2″, CD = 3·3″, DA = 3·6″, and the diagonal BD = 3″. Construct an equivalent triangle and hence find the approximate area of the quadrilateral. D. B. 1927

(2) A quadrilateral field ABCD has its sides AB = 450 metres, BC – 380 metres, CD – 330 metres, AD = 390 metres and the diagonal AC = 660 metres. Draw a plan (scale 1 cm to 50 metres). Reduce your plan to an equivalent triangle and measure its base and altitude. Hence estimate the area of the field. D. B. 1935

(3) Construct a quadrilateral ABCD whose sides shall be 9, 6, 5, 4 centimetres, and whose angle ABC shall be 90°. Construct a triangle equal in area to the quadrilateral. Measure the base and attitude of the triangle and calculate its area. D. B. 1937

Problem 13. C. U. 1932

(1) Construct a square having its diagonal equal to 2″. On a diagonal of the square construct a rhombus equal to the square.

D B. 1926

(2) Draw a square equal to the difference of two given squares.

Problem 14. C. U. 1912, 19, 21, 38. D. B. 1931.

(1) Find a point equidistant from three given points. (C. U. 1912)

Problem 15. C. U. 1913, 19.

(1) Construct a circle to touch two given straight lines.

Problem 16. C. U. 1933, 35.

(1) Construct a rhombus equal in area to a given rectangle and having a side equal to a side of the rectangle. C. U. 1933.

Problem 17. C. U. 1934.

Problem 18. (cor.) D. B. 1927, 35, 40.

(1) Give the construction for drawing a rectangle equal in area to a given rectilineal figure and reducing it to a square of equal area. D. B. 1935.

(2) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point. C. U. 1934. D. B. 1933, 1940.

(3) Bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides. C. U. 1934, 39.

Problem 20. C. U. 1926, 27.

Problem 21. C. U. 1924, 29, 31.

(1) Draw a tangent to a circle from a given point on its circumference. D. B. 1930.

(2) Find the locus of a point which moves in such a manner that tangents from it to a fixed circle are of the same constant length. D. B. 1933.

(3) Draw a tangent to a circle of radius $1\frac{1}{4}$ inches from a given point distant $3\frac{1}{4}$ inches from its centre.

Measure the length of the tangent between the given point and the point of contact and give the result of this measurement. D. B. 1938.

Problem 22-23. C. U. 1917, 19, 31.

(1) How many common tangents may be drawn when the circles cut one another ? How many to non-intersecting circles ?
C. U. 1931.

(2) Draw a circle of given radius to pass through a given point and have its centre on a given straight line. C. U. 1926.

(3) Show how to construct a circle to touch each of two parallel straight lines and a transversal. C. U. 1935.

Problem 24.

(1) Construct a triangle having given the base, the vertical angle and the altitude. C. U. 1921.

(2) Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of the intersection of the medians (centroid) D. B. A. 1927, 37.

(3) Given the base and vertical angle of a triangle, find the locus of its in-centre. D. B. A. 1929.

(4) On a given straight line AB construct a segment of a circle containing an angle of 135°. D. B A. 1934.

(5) On a given base 2″ long construct a triangle such that the vertical angle is 150° and the sum of the remaining sides is 3″. State the construction in full. D. B. A. 1935.

(6) On a given base 3″ long construct a triangle whose vertical angle is 135° and such that the bisector of this vertical angle meets the base at a distance of 2″ from one of its ends. D. B. A. 1936.

Problem 25. C. U. A. 1910, 23.

(1) Construct a circle about a given equilateral triangle. C. U. 1910.

Problem 26. C. U. 1917. 19. 23. 24.

(1) Draw an equilateral triangle on a side of 8 cm, and find by calculation and measurement (to the nearest millimetre) the radius of the inscribed or the circumscribed circle. D. B. A. 1925.

Problem 27. C. U. 1930.

Problem 28.

(1) In a circle of radius 4 cm. inscribe an equilateral triangle. Calculate the length of its side to the nearest millimetre and verify measurement. D. B. A. 1927.

(2) If a circle be inscribed in an equilateral triangle inscribed in a given circle, prove that its radius is half that of the given circle. C. U. 1910.

Problem 29. D. B. A. 1929.

(1) Construct an equilateral triangle about a given circle. C. U. A. 1913, 21, 22, 32.

(2) Prove that each side of an equilateral triangle constructed about a circle is bisected at its point of contact with the circle. C. U. A. 1913.

Problem 30.

(1) Construct a regular pentagon about a given circle. C. U. A. 1915, 34.

(2) Inscribe a regular hexagon in a given circle. Prove that if the alternate vertices are joined the area of the triangle thus formed is half that of the hexagon. C. U. A. 1932.

(3) Draw a circle of diameter 3″ and inscribe accurately a regular pentagon in it: measure the side of the pentagon. C. U. 1934.

(4) Draw a circle of radius 5cm. Inscribe a regular octagon in it. C. U. A. 1935.

Problem 31. C. U. A. 1929.

(1) Prove that the circumference of a circle is greater than three times its diameter. C. U. A. 1932.

Problem 32. C. U. A. 1920, 21, 24, 30. D. B. A. 1933.

(1) Given a straight line 3″ long. Divide it internally, so that the rectangle under the two parts shall be equal to the square on a line of one inch. C. U. A. 1920, 21. See. Prob. 33.

(2) Describe a square equal in area to a given quadrilateral. D. B. A. 1930.

(3) Construct a square equal in area to an equilateral triangle of side 2″, and prove the correctness of your construction.

D. B. A. 1931.

(4) Draw a rectangle 8 cm. by 2 cm., and construct a square of equal area, and prove the correctness of your construcion.

D. B. A. 1932.

(5) Divide the area of a given square into parts from which two equal squares can be made up. C. U. 1932.

(6) Construct a square whose area is 18 square units and measure a side. D. B. A. 1934.

(7) Draw any rectangle whose area is 8·64 square inches; and construct a square of equal area. Find by measurement the length of each side of the square. D. B. A. 1937.

(8) Describe a right-angled isosceles triangle equal to a given parallelogram. D. B. A. 1938.

Problem 34. D. B. A. 1930.

(9) If a straight line is divided internally in medial section and from the greater segment a part is taken equal to the less shew that the greater segment is also divided in medial section.

D. B. A. 1930.

Problem 35. C. U. A. 1917, 20, 33. D. B. A. 1924.

(1) Construct an angle equal to fifth part of a right angle.

C. U. 1933.